



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



3 3433 06630761 6





CEA  
FRANCE  
L'ESPE



CEA  
FRANCE  
L-001



1.

2.

3.









**ANNALES**

**SCIENTIFIQUES**

**DE**

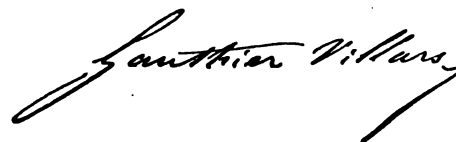
**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.**

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1886, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

---

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



**ANNALES**  
**SCIENTIFIQUES**  
**DE**  
**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,**

**PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES**  
**DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,**

**PAR**  
**UN COMITÉ DE REDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.**

---

<sup>2.</sup>  
**TROISIÈME SÉRIE.**  
<sup>3.</sup>  
**TOME TROISIÈME. — ANNÉE 1886.**

---

**PARIS,**  
**GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE**  
**DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,**  
**SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,**  
Quai des Augustins, 55.

—  
**1886**  
(Tous droits réservés.)

NEW YORK  
PUBLIC  
LIBRARY



4329-

UNIVERSITY OF ILLINOIS  
AT CHICAGO  
LIBRARY

## COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAÎTRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

### Sciences mathématiques.

MM.  
APPELL, Prof. à la Sorbonne.  
BERTRAND, de l'Institut.  
BONNET, de l'Institut.  
BOURGET, Recteur de l'Académie  
de Clermont.  
G. DARBOUX, de l'Institut.  
E. GOURSAT.  
HERMITE, de l'Institut.  
E. PICARD, Chargé de cours à  
la Sorbonne.  
TANNERY, Sous-Dir. de l'École.  
TISSERAND, de l'Institut.

### Sciences physiques.

MM.  
BERTHELOT, de l'Institut.  
BOUVY, Prof. à la Sorbonne.  
DEBRAY, de l'Institut.  
H. DUFET.  
FRIEDEL, de l'Institut.  
GERNEZ.  
HAUTEFECILLE.  
MASCART, de l'Institut.  
TROOST, de l'Institut.  
VIOLE.

### Sciences naturelles.

MM.  
BONNIER.  
DASTRE, Suppl. à la Sorbonne.  
DES CLOIZEAUX, de l'Institut.  
DE LACAZE-DUTHIERS, de l'In-  
stitut.  
LORY, Correspondant de l'In-  
stitut.  
MUNIER-CHALMAS.  
PASTEUR, de l'Institut.  
PERRIER, Prof. au Muséum.  
POUCHET, Prof. au Muséum.  
VAN TIEGHEM, de l'Institut.

---

## ADMINISTRATION.

MM. DEBRAY, de l'Institut, Professeur à la Sorbonne .....	<i>Directeur.</i>
G. DARBOUX, de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.....	} <i>Secrétaires.</i>
GERNEZ, Maître de Conférences à l'École Normale.....	
HAUTEFECILLE, Professeur à la Sorbonne.....	





# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

## L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

SUR LES

### FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL,  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

---

J'ai indiqué précédemment (*Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. I et II) une méthode de décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples. L'élément de cette décomposition est la fonction

$$\chi_{\mu}(x, y) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K} (x - y - 2niK'),$$

et la formule de décomposition est la suivante. Soit  $F(z)$  une fonction doublement périodique de troisième espèce vérifiant les deux relations

$$F(z + 2K) = F(z), \quad F(z + 2iK') = e^{\frac{m\pi zi}{K}} F(z),$$

où  $m$  désigne un entier positif ou négatif différent de zéro. Supposons que cette fonction  $F(z)$  admette, dans un parallélogramme des périodes,

les pôles simples  $a, b, \dots, l$  avec les résidus respectifs  $A, B, \dots, L$ . Alors, si l'entier  $m$  est *négalif*,  $m = -\mu$ , on a

$$F(z) = A \chi_\mu(z, a) + B \chi_\mu(z, b) + \dots + L \chi_\mu(z, l);$$

et, si  $m$  est *positif*,

$$F(z) = -A \chi_m(a, z) - B \chi_m(b, z) - \dots - L \chi_m(l, z) + G(z),$$

où  $G(z)$  désigne une *fonction entière* vérifiant les mêmes relations que  $F(z)$ , à savoir

$$G(z + 2K) = G(z), \quad G(z + 2iK') = e^{\frac{-m\pi zi}{K}} G(z).$$

Si certains pôles étaient multiples, par exemple si le pôle  $a$  était d'ordre  $\alpha$ , la première formule de décomposition ( $m < 0$ ) contiendrait linéairement les fonctions

$$\chi_\mu(z, a), \quad D_a \chi_\mu(z, a), \quad \dots, \quad D_a^{\alpha-1} \chi_\mu(z, a),$$

et la seconde ( $m > 0$ ), les fonctions

$$\chi_m(a, z), \quad D_a \chi_m(a, z), \quad \dots, \quad D_a^{\alpha-1} \chi_m(a, z).$$

Je me propose de donner quelques exemples simples de la formule de décomposition dans l'un et l'autre cas, en m'attachant principalement à montrer comment, dans le deuxième cas ( $m > 0$ ), on peut déterminer la *partie entière*  $G(z)$ .

1. Je vais appliquer tout d'abord la formule de décomposition en éléments simples aux six fonctions

$$\frac{1}{H(z)H_1(z)}, \quad \frac{1}{\Theta(z)\Theta_1(z)}, \quad \frac{1}{H(z)\Theta_1(z)},$$

$$\frac{1}{H_1(z)\Theta(z)}, \quad \frac{1}{H(z)\Theta(z)}, \quad \frac{1}{H_1(z)\Theta_1(z)}$$

qui n'ont pas été développées par M. Biehler dans sa Thèse. Les développements des fonctions

$$\frac{1}{\Theta^2(z)}, \quad \frac{1}{H^2(z)}, \quad \frac{1}{\Theta_1^2(z)}, \quad \frac{1}{H_1^2(z)}$$



ont été donnés par M. Hermite et se trouvent reproduits dans mon second Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série. t. II, p. 18).

Soit

$$\varphi(z) = \frac{1}{H(z)H_1(z)};$$

cette fonction vérifie les deux relations

$$\begin{aligned}\varphi(z + 2K) &= \varphi(z), \\ \varphi(z + 2iK') &= e^{\frac{2\pi i}{K}(z + iK' - \frac{K}{2})} \varphi(z).\end{aligned}$$

Si donc on fait, pour un moment,

$$z + iK' - \frac{K}{2} = x$$

et

$$\varphi\left(x - iK' + \frac{K}{2}\right) = \Phi(x),$$

cette fonction  $\Phi$  vérifie les deux équations

$$\Phi(x + 2K) = \Phi(x), \quad \Phi(x + 2iK') = e^{\frac{2\pi x i}{K}} \Phi(x);$$

de plus, elle admet, dans un parallélogramme des périodes, les deux pôles simples

$$a = iK' - \frac{K}{2}, \quad b = iK' + \frac{K}{2}$$

avec les résidus respectifs

$$\frac{1}{\eta' \eta}, \quad -\frac{1}{\eta' \eta},$$

où

$$\eta = H_1(0), \quad \eta' = H'(0).$$

On a donc, d'après la formule de décomposition,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\eta' \eta} \chi_2(x, a) - \frac{1}{\eta' \eta} \chi_2(x, b).$$

Par suite, en revenant à la variable  $z$  par la formule  $x = z + iK' - \frac{K}{2}$  et remplaçant  $a$  et  $b$  par leurs valeurs

$$\frac{\eta' \eta}{H(z)H_1(z)} = \chi_2\left(z + iK' - \frac{K}{2}, iK' - \frac{K}{2}\right) - \chi_2\left(z + iK' - \frac{K}{2}, iK' + \frac{K}{2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\eta' \eta}{\Theta \Theta_1} = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n} \left[ \cot \frac{\pi}{2K} (z - 2niK') - \cot \frac{\pi}{2K} (z - K - 2niK') \right].$$

La seconde cotangente est égale à

$$- \operatorname{tang} \frac{\pi}{2K} (z - 2niK');$$

on a donc enfin, en réduisant,

$$(1) \quad \frac{\eta' \eta}{\Theta \Theta_1} = \frac{\pi}{K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{K} (z - 2niK')}.$$

Soit maintenant

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\Theta(z) \Theta_1(z)};$$

cette fonction satisfait aux mêmes relations fondamentales que  $\varphi$ ; si donc on prend comme nouvelle variable la variable  $x$  liée à  $z$  par l'équation  $x = z + iK' - \frac{K}{2}$  et si l'on pose

$$\varphi_1\left(x - iK' + \frac{K}{2}\right) = \Phi_1(x),$$

cette fonction  $\Phi_1(x)$  vérifie les mêmes relations que  $\Phi$ . De plus, cette fonction  $\Phi_1(x)$  admet, dans un parallélogramme des périodes, les deux pôles d'affixes

$$\frac{K}{2}, \quad -\frac{K}{2}$$

avec des résidus égaux tous deux à  $\frac{i\sqrt{q}}{\eta' \eta}$ . On a donc

$$\Phi_1(x) = \frac{i\sqrt{q}}{\eta' \eta} \left[ \zeta_2\left(x, \frac{K}{2}\right) + \zeta_2\left(x, -\frac{K}{2}\right) \right],$$

ou, en revenant à la variable  $z$ ,

$$\frac{\eta' \eta}{\Theta(z) \Theta_1(z)} = i\sqrt{q} \left[ \zeta_2\left(z + iK' - \frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right) + \zeta_2\left(z + iK' - \frac{K}{2}, -\frac{K}{2}\right) \right],$$

ce qui donne

$$\frac{\eta' \eta}{\Theta \Theta_1} = \frac{\pi i}{2K} \sqrt[3]{q} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n(n-1)} \left\{ \cot \frac{\pi}{2K} [z - (2n-1)iK'] - \operatorname{tang} \frac{\pi}{2K} [z - (2n-1)iK'] \right\}$$

ou, en réduisant par la formule  $\frac{1}{2}(\cot \alpha - \operatorname{tang} \alpha) = \cot 2\alpha$ ,

$$(2) \quad \frac{\eta' \eta}{\Theta \Theta_1} = \frac{\pi i}{K} \sum (-1)^n q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \cot \frac{\pi}{K} [z - (2n-1)iK'].$$

On peut arriver plus rapidement à cette formule (2) en remarquant que si l'on fait, pour un instant,

$$K = 2K_1, \quad q = \sqrt[3]{q_1},$$

la fonction  $\Phi_1(x)$  vérifie les deux relations

$$\Phi_1(x + 2K_1) = \Phi_1(x), \quad \Phi_1(x + 2iK') = e^{\frac{\pi i}{K_1}} \Phi_1(x)$$

et admet, dans le parallélogramme des périodes  $2K_1$  et  $2iK'$ , un seul pôle simple

$$x = -K_1$$

de résidu  $\frac{i\sqrt{q}}{\eta' \eta}$ . On a donc

$$\frac{\eta' \eta}{\Theta \Theta_1} = i\sqrt{q} \chi_1(x, -K_1) = i\sqrt{q} \chi_1(z + iK' - K_1, -K_1),$$

la fonction  $\chi_1$  étant formée avec les périodes  $2K_1$  et  $2iK'$ ,

$$\chi_1(x, a) = \frac{\pi}{2K_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n\pi ai}{K_1}} q_1^{n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K_1} (x - a - 2niK');$$

en remplaçant  $a$  par  $-K_1$  et  $x$  par  $z + iK' - K_1$ , on retrouve la formule (2).

Passons maintenant aux deux fonctions

$$\frac{1}{H(z) \Theta_1(z)}, \quad \frac{1}{H_1(z) \Theta(z)}.$$

En posant

$$f(z) = e^{-\frac{\pi zi}{2K}} \frac{1}{H(z) \Theta_1(z)},$$

on a

$$f(z + 2K) = f(z), \quad f(z + 2iK') = e^{\frac{2\pi i}{K}(z - \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2})} f(z);$$

si donc l'on fait

$$z - \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2} = x, \quad f(z) = f_1(x),$$

cette fonction  $f_1(x)$  vérifiera les deux relations

$$f_1(x + 2K) = f_1(x), \quad f_1(x + 2iK') = e^{\frac{2\pi x i}{K}} f_1(x),$$

et admettra, dans un parallélogramme des périodes  $2K$  et  $2iK'$ , les deux pôles simples

$$x = -\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}, \quad x = \frac{K}{2} - \frac{iK'}{2}$$

avec les résidus

$$\frac{1}{\eta' \theta_1}, \quad \frac{q}{\eta' \theta_1},$$

en posant

$$\theta_1 = \Theta_1(0).$$

Donc

$$f_1(x) = \frac{1}{\eta' \theta_1} \chi_2\left(x, -\frac{K + iK'}{2}\right) + \frac{q}{\eta' \theta_1} \chi_2\left(x, \frac{K - iK'}{2}\right).$$

Revenant à la variable  $z$  par la formule

$$x = z - \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2},$$

on a

$$\frac{\eta' \theta_1}{H\Theta_1} = e^{\frac{\pi z i}{2K}} \chi_2\left(z - \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}, -\frac{K + iK'}{2}\right) + q e^{\frac{\pi z i}{2K}} \chi_2\left(z - \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}, \frac{K - iK'}{2}\right).$$

Les deux fonctions  $\chi_2$  qui figurent dans cette formule sont

$$\begin{aligned} \chi_2\left(z - \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}, -\frac{K + iK'}{2}\right) &= \frac{\pi}{2K} \sum (-1)^n q^{2n^2 - n} \cot \frac{\pi}{2K} (z - 2niK'), \\ \chi_2\left(z - \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}, \frac{K - iK'}{2}\right) &= \frac{\pi}{2K} \sum (-1)^n q^{2n^2 - 2n} \cot \frac{\pi}{2K} [z - K - (2n - 1)iK']. \end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus de  $\frac{\eta' \theta_1}{H\Theta_1}$ , on pourra faire disparaître les

exponentielles qui multiplient ces deux fonctions  $\chi_2$  en appliquant l'identité

$$e^{\alpha i} \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} + i e^{\alpha i},$$

dans laquelle on fait successivement

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2K} (z - 2niK'), \\ \alpha &= \frac{\pi}{2K} [z - K - (2n-1)iK']. \end{aligned}$$

Chaque terme de la série se transforme ainsi en une cosécante augmentée d'une exponentielle; dans la somme, la partie provenant de l'exponentielle est

$$e^{\frac{\pi z i}{2K}} \sum (-1)^n (q^{2n^2-n} + q^{2n^2-3n+1}),$$

c'est-à-dire *zéro*, puisque les termes qui correspondent à des valeurs de  $n$ , dont la somme est 1, sont égaux et de signes contraires; il ne subsiste donc que la série des cosécantes, et l'on a

$$(3) \quad \frac{\eta' \theta_1}{H \Theta_1} = \frac{\pi}{2K} \sum (-1)^n \left\{ \frac{q^{2n^2}}{\sin \frac{\pi}{2K} (z - 2niK')} - \frac{i q^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\cos \frac{\pi}{2K} [z - (2n-1)iK']} \right\}.$$

Si, dans cette formule, on change  $z$  en  $z + K$ , on obtient immédiatement le développement de

$$\frac{1}{H_1(z) \Theta(z)};$$

on a ainsi

$$(4) \quad \frac{\eta' \theta_1}{H_1 \Theta} = \frac{\pi}{2K} \sum (-1)^n \left\{ \frac{q^{2n^2}}{\cos \frac{\pi}{2K} (z - 2niK')} + \frac{i q^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\sin \frac{\pi}{2K} [z - (2n-1)iK']} \right\}.$$

Dans ce qui précède, pour obtenir une fonction  $f(z)$  admettant la période  $2K$ , nous avons dû multiplier

$$\frac{1}{H(z) \Theta_1(z)}$$

par l'exponentielle  $e^{-\frac{\pi z i}{2K}}$  que nous avons de nouveau fait disparaître pour arriver à la formule (3). On peut, dans tous les exemples analogues, éviter cette double transformation de la façon suivante.

Soit une fonction  $\tilde{f}(z)$  qui vérifie deux équations de la forme

$$\tilde{f}(z + 2K) = -\tilde{f}(z), \quad \tilde{f}(z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}} \tilde{f}(z),$$

où  $m$  est un entier différent de zéro. Considérons la fonction

$$\omega_{\mu}(x, a) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi a i}{K}} q^{\mu n^2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2K} (x - a - 2niK')},$$

qui, pour le cas de  $\mu = 1$ , a déjà été employée par M. Hermite <sup>(1)</sup> et dont j'ai indiqué précédemment <sup>(2)</sup> la liaison avec la fonction  $\chi_{\mu}$ . Si la fonction  $\tilde{f}(z)$  admet dans un parallélogramme des périodes les pôles simples  $a, b, \dots, l$  avec les résidus  $A, B, \dots, L$ , et si l'entier  $m$  est négatif,  $m = -\mu$ , on pourra l'écrire

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = & A \omega_{\mu}(z - iK', a - iK') \\ & + B \omega_{\mu}(z - iK', b - iK') + \dots + L \omega_{\mu}(z - iK', l - iK'). \end{aligned}$$

Pour démontrer cette nouvelle formule de décomposition, il suffit de vérifier, comme on l'a fait dans mon premier Mémoire <sup>(3)</sup> pour une question analogue, que la fonction de  $x$

$$\tilde{f}(x) \omega_{\mu}(z - iK', x - iK')$$

admet les périodes  $2K$  et  $2iK'$ . Alors, comme cette fonction de  $x$  a pour pôles, dans un parallélogramme élémentaire, les points

$$x = z, \quad x = a, \quad x = b, \quad \dots, \quad x = l,$$

avec les résidus

$$-\tilde{f}(z), \quad A \omega_{\mu}(z - iK', a - iK'), \quad B \omega_{\mu}(z - iK', b - iK'), \quad \dots,$$

en écrivant que la somme de ces résidus est nulle, on obtient immédiatement la formule à démontrer.

<sup>(1)</sup> Voir *Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini*, p. 4.

<sup>(2)</sup> *Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 33.

<sup>(3)</sup> *Ibid.*, t. I, p. 151, n<sup>o</sup> 8.

Soit, par exemple,

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\Pi\left(z - iK' + \frac{K}{2}\right) \Theta_1\left(z - iK' + \frac{K}{2}\right)};$$

cette fonction vérifie les deux relations

$$\mathcal{F}(z + 2K) = -\mathcal{F}(z), \quad \mathcal{F}(z + 2iK') = e^{\frac{2\pi i}{K} z} \mathcal{F}(z);$$

elle admet, dans un parallélogramme élémentaire, les deux pôles simples

$$a = iK' - \frac{K}{2}, \quad b = \frac{K}{2}$$

avec les résidus

$$A = \frac{1}{\eta' \theta_1}, \quad B = \frac{i\sqrt{q}}{\eta' \theta_1}.$$

Donc

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\eta' \theta_1} \omega_2\left(z - iK', -\frac{K}{2}\right) + \frac{i\sqrt{q}}{\eta' \theta_1} \omega_2\left(z - iK', \frac{K}{2} - iK'\right).$$

Changeant  $z$  en  $z + iK' - \frac{K}{2}$ , on obtient

$$\frac{\eta' \theta_1}{\Pi(z) \Theta_1(z)} = \omega_2\left(z - \frac{K}{2}, -\frac{K}{2}\right) + i\sqrt{q} \omega_2\left(z - \frac{K}{2}, \frac{K}{2} - iK'\right),$$

ce qui, d'après l'expression de  $\omega_2(z, a)$ , est la formule (3).

Soit enfin

$$\psi(z) = \frac{1}{\Pi(z) \Theta(z)}.$$

Cette fonction  $\psi$  vérifie les deux relations

$$\psi(z + 2K) = -\psi(z), \quad \psi(z + 2iK') = e^{\frac{2\pi i}{K} (z + iK')} \psi(z).$$

Si donc on prend pour nouvelle variable

$$z + iK' = x,$$

et si l'on fait

$$\psi(z) = \psi_1(x),$$

on aura

$$\psi_1(x + 2\mathbf{K}) = -\psi_1(x), \quad \psi_1(x + 2i\mathbf{K}') = e^{\frac{2\pi x'}{\mathbf{K}}} \psi_1(x).$$

Comme cette fonction  $\psi_1(x)$  admet les deux pôles simples

$$a = i\mathbf{K}', \quad b = 2i\mathbf{K}',$$

avec les résidus

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\eta' \vartheta}, \quad \mathbf{B} = -\frac{\sqrt{q}}{\eta' \vartheta},$$

où  $\vartheta = \Theta(o)$ , on aura

$$\psi_1(x) = \mathbf{A} \omega_2(x - i\mathbf{K}', a - i\mathbf{K}') + \mathbf{B} \omega_2(x - i\mathbf{K}', b - i\mathbf{K}'),$$

c'est-à-dire en revenant à la variable  $z$  par la formule  $x = z + i\mathbf{K}'$  et remplaçant  $a, b, \mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  par leurs valeurs

$$\frac{\eta' \vartheta}{\Pi(z) \Theta(z)} = \omega_2(z, o) - \sqrt{q} \omega_2(z, i\mathbf{K}'),$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \frac{\eta' \vartheta}{\Pi \Theta} = \frac{\pi}{2\mathbf{K}} \sum \left\{ \frac{q^{2n^2}}{\sin \frac{\pi}{2\mathbf{K}} (z - 2ni\mathbf{K}')} - \frac{q^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\sin \frac{\pi}{2\mathbf{K}} [z - (2n-1)i\mathbf{K}']} \right\};$$

d'où l'on conclut immédiatement, en changeant  $z$  en  $z + \mathbf{K}$ ,

$$(6) \quad \frac{\eta' \vartheta}{\Pi_1 \Theta_1} = \frac{\pi}{2\mathbf{K}} \sum \left\{ \frac{q^{2n^2}}{\cos \frac{\pi}{2\mathbf{K}} (z - 2ni\mathbf{K}')} - \frac{q^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\cos \frac{\pi}{2\mathbf{K}} [z - (2n-1)i\mathbf{K}']} \right\}.$$

Telles sont les six formules que nous voulions obtenir. Comme l'on a

$$\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \eta' = \eta \vartheta_1,$$

on peut les écrire de la façon suivante, en désignant par  $\mu$  un entier qui prend toutes les valeurs *paires* de  $-\infty$  à  $+\infty$  et par  $\nu$  un entier



qui prend toutes les valeurs *impaires* de  $-\infty$  à  $+\infty$  :

$$\begin{aligned}\frac{\eta^2 \theta \theta_1}{\overline{H} \overline{H}_1} &= 2 \sum i^\mu q^{\frac{\mu^2}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{K} (z + \mu i K')}, \\ \frac{\eta^2 \theta \theta_1}{\overline{\Theta} \overline{\Theta}_1} &= 2 \sum i^\nu q^{\frac{\nu^2}{2}} \cot \frac{\pi}{K} (z + \nu i K'), \\ \frac{\eta \theta \theta_1^2}{\overline{H} \overline{\Theta}_1} &= \sum \left[ \frac{i^\mu q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\sin \frac{\pi}{2K} (z + \mu i K')} - \frac{i^\nu q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\cos \frac{\pi}{2K} (z + \nu i K')} \right], \\ \frac{\eta \theta \theta_1^2}{\overline{H}_1 \overline{\Theta}} &= \sum \left[ \frac{i^\mu q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\cos \frac{\pi}{2K} (z + \mu i K')} + \frac{i^\nu q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\sin \frac{\pi}{2K} (z + \nu i K')} \right], \\ \frac{\eta \theta^2 \theta_1}{\overline{H} \overline{\Theta}} &= \sum \left[ \frac{q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\sin \frac{\pi}{2K} (z + \mu i K')} - \frac{q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\sin \frac{\pi}{2K} (z + \nu i K')} \right], \\ \frac{\eta \theta^2 \theta_1}{\overline{H}_1 \overline{\Theta}_1} &= \sum \left[ \frac{q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\cos \frac{\pi}{2K} (z + \mu i K')} - \frac{q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\cos \frac{\pi}{2K} (z + \nu i K')} \right].\end{aligned}$$

2. Pour faire une autre application de la formule de décomposition, considérons la fonction (1)

$$\psi_m(z, \alpha) = e^{\frac{m\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H(z-\alpha)} \frac{H(z-\alpha_1) H(z-\alpha_2) \dots H(z-\alpha_m) H(z+s-\alpha-mK)}{H(\alpha-\alpha_1) H(\alpha-\alpha_2) \dots H(\alpha-\alpha_m) H(s-mK)},$$

où  $m$  désigne un entier positif,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  des constantes et  $s$  la somme

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m.$$

Cette fonction, considérée comme fonction de  $\alpha$ , vérifie les deux relations

$$\begin{aligned}\psi_m(z, \alpha + 2K) &= \psi_m(z, \alpha), \\ \psi_m(z, \alpha + 2iK') &= e^{\frac{m\pi 2i}{K}} \psi_m(z, \alpha);\end{aligned}$$

---

(1) Voir *Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 141.

de plus, elle admet, dans un parallélogramme des périodes, les pôles simples

$$\alpha = z, \quad \alpha = a_1, \quad \alpha = a_2, \quad \dots, \quad \alpha = a_m$$

avec les résidus

$$-1, \quad G_1(z), \quad G_2(z), \quad \dots, \quad G_m(z),$$

où l'on appelle  $G_v(z)$  la fonction entière de  $z$ ,

$$G_v(z) = e^{\frac{m\pi(z-a_v)i}{2K}} \frac{H(z-a_1) \dots H(z-a_{v-1}) H(z-a_{v+1}) \dots H(z-a_m) H(z+s-a_v-mK)}{H(a_v-a_1) \dots H(a_v-a_{v-1}) H(a_v-a_{v+1}) \dots H(a_v-a_m) H(s-mK)}.$$

On a donc, d'après la formule de décomposition appliquée à  $\psi_m(z, \alpha)$  considérée comme fonction de  $\alpha$ ,

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_m(z, \alpha) = -\chi_m(\alpha, z) + G_1(z) \chi_m(\alpha, a_1) \\ \quad + G_2(z) \chi_m(\alpha, a_2) + \dots + G_m(z) \chi_m(\alpha, a_m). \end{cases}$$

On retrouverait cette même formule en décomposant la fonction  $\psi_m(z, \alpha)$  considérée comme fonction de  $z$  en un élément simple  $-\chi_m(\alpha, z)$  et en une partie entière en  $z$ .

En supposant, par exemple,  $m=1$  et écrivant  $a$  au lieu de  $a_1$ , la formule précédente donne

$$\begin{aligned} \psi_1(z, \alpha) &= e^{\frac{\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H(z-\alpha)} \frac{H(z-a) H(z+a-\alpha-K)}{H(\alpha-a) H(\alpha-K)} \\ &= -\chi_1(\alpha, z) + e^{\frac{\pi(z-a)i}{2K}} \frac{H(z-K)}{H(\alpha-K)} \chi_1(\alpha, a). \end{aligned}$$

Voici une conséquence intéressante de cette relation. Faisons-y

$$\alpha = z + a + K;$$

alors le premier membre s'annule, et il reste une équation qui peut s'écrire

$$e^{\frac{\pi ai}{2K}} H_1(a) \chi_1(z+a+K, z) = e^{\frac{\pi zi}{2K}} H_1(z) \chi_1(a+z+K, a),$$

ou encore

$$e^{\frac{\pi ai}{2K}} H_1(a) \varpi(z, a) = e^{\frac{\pi zi}{2K}} H_1(z) \varpi(a, z),$$

en posant

$$\varpi(z, a) = \chi_1(z+a+K, z),$$

formule qui donne la permutation de l'argument et du paramètre dans la fonction  $\varpi(z, \alpha)$ . Cette formule est, à la différence des notations près, identique à celle que M. Hermite a établie, dans les *Collectanea mathematica*, et qu'il écrit

$$\frac{\Phi(x, \omega)}{H(\omega)} = i \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^n e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{2K} (\omega - 2niK')}.$$

On obtiendrait une formule analogue relative à la fonction  $\gamma_m$  en faisant, dans l'équation (7),

$$\alpha = z + s - mK$$

et remarquant qu'alors le premier membre  $\psi_m(z, \alpha)$  devient nul identiquement.

3. Les applications qui précèdent sont relatives à des fonctions de troisième espèce qui, mises sous la forme du quotient de deux produits de fonctions  $\Theta$ , contiennent plus de fonctions  $\Theta$  au dénominateur qu'au numérateur.

Envisageons maintenant une fonction uniforme  $F(z)$  vérifiant les deux relations

$$F(z + 2K) = F(z), \quad F(z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}} F(z),$$

où  $m$  est un entier positif. Alors, en supposant que cette fonction n'ait que des pôles à distance finie, on pourra la mettre sous la forme d'un quotient de produits de fonctions  $\Theta$ , dans lequel il y aura  $m$  fonctions  $\Theta$  de plus au numérateur qu'au dénominateur. Si l'on appelle

$$a, \quad b, \quad \dots, \quad l$$

les pôles de cette fonction dans un parallélogramme élémentaire, ces pôles étant supposés simples, et

$$A, \quad B, \quad \dots, \quad L$$

les résidus correspondants, on pourra écrire la fonction  $F(z)$  de la façon suivante

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \dots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

où  $G(z)$  désigne une fonction entière de  $z$ . Comme chaque fonction, telle que  $\chi_m(a, z)$ , vérifie les mêmes relations que  $F(z)$ , à savoir

$$\chi_m(a, z + 2K) = \chi_m(a, z), \quad \chi_m(a, z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}} \chi_m(a, z),$$

la fonction entière  $G(z)$  devra vérifier ces mêmes relations

$$G(z + 2K) = G(z), \quad G(z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}} G(z).$$

Cette fonction  $G(z)$  pourra donc, comme il est bien connu, s'exprimer d'une façon linéaire et homogène au moyen de  $m$  fonctions particulières vérifiant les mêmes relations.

Voici une première méthode pour déterminer cette partie entière  $G(z)$ . Reprenons la fonction appelée  $\psi_m(z, \alpha)$ ,

$$\psi_m(z, \alpha) = e^{\frac{m\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H(z-\alpha)} \frac{H(z+s-\alpha-mK)}{H(s-mK)} \prod_{v=1}^{v=m} \frac{H(z-\alpha_v)}{H(\alpha-\alpha_v)},$$

dans laquelle  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  désignent des constantes et  $s$  la somme  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ . Cette fonction, considérée comme fonction de  $\alpha$ , admet dans un parallélogramme élémentaire les pôles

$$\alpha = z, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha = \alpha_m;$$

appelons, comme plus haut,

$$G_1(z), \quad G_2(z), \quad \dots, \quad G_m(z)$$

les résidus de cette fonction relatifs aux pôles  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , résidus qui sont des fonctions entières de  $z$ .

La fonction considérée  $F(z)$  pourra alors s'écrire ainsi

$$F(z) = A\psi_m(z, a) + B\psi_m(z, b) + \dots + L\psi_m(z, l) \\ + F(\alpha_1)G_1(z) + F(\alpha_2)G_2(z) + \dots + F(\alpha_m)G_m(z).$$

Cette formule a été établie dans mon premier Mémoire <sup>(1)</sup>; elle s'obtient en remarquant que la fonction de  $\alpha$ ,

$$F(\alpha)\psi_m(z, \alpha),$$

---

<sup>(1)</sup> *Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 141 et suiv.

est doublement périodique et, en écrivant que la somme de ses résidus relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est *nulle*.

Nous venons de voir (p. 20) que l'on a

$$\begin{aligned}\psi_m(z, a) &= -\chi_m(a, z) + G_1(z)\chi_m(a, a_1) + G_2(z)\chi_m(a, a_2) + \dots + G_m(z)\chi_m(a, a_m), \\ \psi_m(z, b) &= -\chi_m(b, z) + G_1(z)\chi_m(b, a_1) + G_2(z)\chi_m(b, a_2) + \dots + G_m(z)\chi_m(b, a_m), \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_m(z, l) &= -\chi_m(l, z) + G_1(z)\chi_m(l, a_1) + G_2(z)\chi_m(l, a_2) + \dots + G_m(z)\chi_m(l, a_m);\end{aligned}$$

donc, en remplaçant dans l'expression de  $F(z)$  les fonctions  $\psi_m(z, a)$ ,  $\psi_m(z, b)$ , ...,  $\psi_m(z, l)$  par leurs valeurs ci-dessus, on a

$$(8) \quad F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \dots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

où la partie *entière*  $G(z)$  est donnée par la formule

$$G(z) = \lambda_1 G_1(z) + \lambda_2 G_2(z) + \dots + \lambda_m G_m(z),$$

le coefficient constant  $\lambda_v$  ayant pour valeur

$$\begin{aligned}\lambda_v &= F(a_v) + A\chi_m(a, a_v) + B\chi_m(b, a_v) + L\chi_m(l, a_v) \\ &\quad (v = 1, 2, \dots, m).\end{aligned}$$

Telle est donc l'expression de la partie entière cherchée; il est à remarquer que cette partie entière  $G(z)$  ne doit dépendre en aucune façon des constantes  $a_1, a_2, \dots, a_m$  qui figurent dans son expression. On pourra, dans chaque exemple particulier, choisir les valeurs de ces constantes, de façon à simplifier le plus possible la forme de  $G(z)$ .

J'ai écrit les formules précédentes en supposant les constantes  $a_1, a_2, \dots, a_m$  différentes à des multiples des périodes près; si plusieurs de ces constantes devenaient égales à des multiples des périodes près, ces formules subiraient des modifications faciles à apercevoir d'après la façon même dont elles ont été établies.

La méthode que je viens de donner pour déterminer la partie entière  $G(z)$  revient à la méthode des coefficients indéterminés. En effet, soit

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \dots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

où  $G(z)$  est encore inconnue. Comme cette fonction entière vérifie les

relations

$$G(z + 2K) = G(z), \quad G(z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}} G(z),$$

elle est une fonction linéaire à coefficients constants de  $m$  fonctions particulières vérifiant ces mêmes relations, par exemple des fonctions particulières appelées ci-dessus

$$G_1(z), \quad G_2(z), \quad \dots, \quad G_m(z),$$

et l'on aura

$$G(z) = \lambda_1 G_1(z) + \lambda_2 G_2(z) + \dots + \lambda_m G_m(z),$$

où il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients constants  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

Pour cela, faisons dans la formule de décomposition  $z = a_v$  et remarquons que, d'après leurs expressions, toutes les fonctions  $G_1(z), G_2(z), \dots, G_m(z)$  s'annulent pour  $z = a_v$ , *excepté*  $G_v(z)$  qui devient égale à l'unité; la fonction  $G(a_v)$  sera donc égale à  $\lambda_v$ , et nous aurons

$$F(a_v) = -A \chi_m(a, a_v) - B \chi_m(b, a_v) - \dots - L \chi_m(l, a_v) + \lambda_v,$$

équation qui donne pour  $\lambda_v$  la valeur déjà écrite plus haut.

4. Soit, par exemple, à décomposer la fonction

$$F(z) = \frac{H^2(z)}{\Theta(z)};$$

cette fonction vérifie les deux relations

$$F(z + 2K) = F(z), \quad F(z + 2iK') = e^{-\frac{i\pi}{K}(z + K + iK')} F(z);$$

si donc on fait

$$z + K + iK' = t$$

et

$$F(z) = F_1(t),$$

on aura une fonction  $F_1(t)$  vérifiant les deux relations

$$F_1(t + 2K) = F_1(t), \quad F_1(t + 2iK') = e^{-\frac{\pi i}{K}} F_1(t),$$

et admettant, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle  $t = K$  avec le résidu

$$\frac{-i}{\sqrt{q}} \frac{\theta^2}{\eta'}.$$

Comme ici l'entier désigné par  $m$  est égal à l'unité, on aura immédiatement

$$F_1(t) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} \frac{\theta^2}{\eta'} \chi_1(K, t) + G(t),$$

$G(t)$  étant une fonction entière telle que

$$G(t + 2K) = G(t), \quad G(t + 2iK') = e^{-\frac{\pi i}{K}} G(t);$$

cette fonction  $G(t)$  est donc de la forme

$$G(t) = \lambda e^{\frac{\pi i}{2K} t} H_1(t),$$

où  $\lambda$  est une constante qui reste à déterminer.

Revenant à la variable  $z$  par la formule

$$t = z + K + iK',$$

on a

$$F(z) = \frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} \frac{\theta^2}{\eta'} \chi_1(K, z + K + iK') - i\lambda \sqrt[4]{q} \Theta(z).$$

On déterminera  $\lambda$  en faisant  $z = 0$ ; on obtient

$$i\lambda \sqrt[4]{q} = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} \frac{\theta^2}{\eta'} \chi_1(K, K + iK');$$

donc

$$-i\sqrt[4]{q} \frac{\eta'}{\theta} \frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = \theta \chi_1(K, z + K + iK') - \Theta(z) \chi_1(K, K + iK').$$

Telle est la formule cherchée. Comparons-la à celle que donne M. Biehler à la page 22 de sa Thèse. Pour cela, remplaçons la fonction  $\chi_1$  par son expression

$$\chi_1(K, z + K + iK') = -\frac{\pi}{2K} \sum (-1)^n e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n^2} \cot \frac{\pi}{2K} [z + (2n + 1)iK'],$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs entières de  $n$ , de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En partant de l'identité

$$\cot \frac{\pi}{2K} [z + (2n + 1)iK'] = -i + \frac{e^{\frac{i\pi}{2K} [z + (2n + 1)iK']}}{\sin \frac{\pi}{2K} [z + (2n + 1)iK']},$$

on trouve immédiatement

$$\chi_1(K, z + K + iK') = \frac{\pi i}{2K} \Theta(z) + \frac{\pi i}{2K} \sqrt[4]{q} Z\left(\frac{\pi z}{2K}\right)$$

en posant

$$Z\left(\frac{\pi z}{2K}\right) = i \sum (-1)^n e^{\frac{(2n+1)\pi z i}{2K}} \frac{q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}}{\sin \frac{\pi}{2K} [z + (2n+1)iK']}$$

Faisant  $z = 0$ , on aura

$$\chi_1(K, K + iK') = \frac{\pi i}{2K} \vartheta + \frac{\pi i}{2K} \sqrt[4]{q} Z(0).$$

Si l'on porte ces expressions de  $\chi_1(K, z + K + iK')$  et de  $\chi_1(K, K + iK')$  dans la formule de décomposition, et si l'on remarque que

$$\frac{2K}{\pi} \frac{\eta'}{\eta} = \vartheta_1 \eta,$$

il vient

$$(8) \quad \vartheta_1 \eta \frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = Z(0) \Theta(z) - \vartheta Z\left(\frac{\pi z}{2K}\right).$$

Cette formule permet de retrouver l'expression de  $\vartheta_1 \eta \frac{H^2(z)}{\Theta(z)}$  donnée par M. Biehler, d'après M. Hermite <sup>(1)</sup>; il suffira de poser avec M. Biehler

$$\frac{\pi z}{2K} = x$$

et de développer la fonction paire  $Z(x)$  suivant les cosinus des multiples de  $x$ . On retrouve ainsi le développement que M. Hermite appelle  $Z(x)$ , développement qui n'est valable que dans une certaine bande du plan. On vérifie aisément que l'on a

$$\frac{\pi i}{2K} Z\left(\frac{\pi z}{2K}\right) = \sqrt[4]{q} e^{\frac{\pi z i}{2K}} \omega_1(K, z + K + iK').$$

Si l'on change, dans la formule (8) qui vient d'être établie,  $z$  en

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 3 et 4; 1862.



$z + iK'$ , on obtient la nouvelle formule

$$\vartheta_1 \eta \frac{\Theta^2(z)}{H(z)} = Z(0) H(z) + \vartheta \sum (-1)^n e^{\frac{n\pi z i}{K}} \frac{q^{n^2}}{\sin \frac{\pi}{2K} (z + 2niK')}.$$

La série qui est multipliée par 0 dans le second membre définit une fonction  $U\left(\frac{\pi z}{2K}\right)$  dont le développement en série trigonométrique est identique à celui que M. Biehler désigne par  $U(x)$  (Thèse, p. 22). On voit que l'on a

$$\frac{\pi}{2K} U\left(\frac{\pi z}{2K}\right) = -\omega_1(K, z + K).$$

L'application de la même méthode aux fonctions de la forme

$$\frac{H(z) \Theta_1(z) H_1(z)}{\Theta(z)},$$

qui contiennent au numérateur le produit de trois fonctions  $\theta$  différentes et au dénominateur la quatrième fonction  $\Theta$ , fournit les développements de ces fonctions tels qu'ils sont donnés par M. Biehler (Thèse, p. 28). Pour ces fonctions, la formule de décomposition en éléments simples se présente d'une façon très commode, car la partie entière est nulle. C'est ce qui résulte immédiatement des formules que j'ai données dans un précédent Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 29).

Mais, si l'on suppose que deux des trois fonctions  $\Theta$  du numérateur deviennent égales, c'est-à-dire si l'on considère l'une des vingt-quatre fonctions de la forme

$$\frac{\Theta_1^2(z) H_1(z)}{H(z)},$$

la formule de décomposition en éléments simples donne un résultat d'une forme qui est différente de celle trouvée par M. Biehler.

Soit, en effet,

$$F(z) = \frac{\Theta_1^2(z) H_1(z)}{H(z)};$$

cette fonction vérifie les relations fondamentales

$$F(z + 2K) = F(z), \quad F(z + 2iK') = e^{-\frac{2i\pi}{K}(z + iK' + \frac{K}{2})} F(z);$$

si donc on pose

$$z + iK' + \frac{K}{2} = t, \quad F(z) = f(t),$$

la fonction  $f(t)$  vérifie les relations

$$f(t + 2K) = f(t), \quad f(t + 2iK') = e^{-\frac{2\pi i}{K}} f(t)$$

et admet, dans un parallélogramme élémentaire, le pôle

$$t = iK' + \frac{K}{2}$$

avec le résidu  $\frac{\eta_1^2 \eta}{\eta'}$ . On a donc

$$f(t) = -\frac{\eta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(iK' + \frac{K}{2}, t\right) + g(t),$$

où  $g(t)$  est une fonction entière vérifiant les mêmes relations que  $f(t)$ .  
Revenant à la variable  $z$  par la formule

$$t = z + iK' + \frac{K}{2}$$

et posant

$$g(t) = G(z),$$

on a

$$F(z) = -\frac{\eta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(iK' + \frac{K}{2}, z + iK' + \frac{K}{2}\right) + G(z),$$

où la fonction entière  $G(z)$  vérifie les mêmes relations que  $F(z)$

$$G(z + 2K) = G(z), \quad G(z + 2iK') = e^{-\frac{2\pi i}{K}\left(z + iK' + \frac{K}{2}\right)} G(z).$$

Comme les deux fonctions entières

$$\Theta(z) \Theta_1(z), \quad H(z) H_1(z)$$

vérifient ces mêmes relations et sont linéairement indépendantes, la fonction  $G(z)$ , d'après un théorème connu, sera de la forme

$$G(z) = A \Theta(z) \Theta_1(z) + B H(z) H_1(z),$$

A et B étant des constantes qui se déterminent comme il suit. Dans la formule trouvée

$$\frac{\Theta_1^2(z) H_1(z)}{H(z)} = -\frac{\eta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(iK' + \frac{K}{2}, z + iK' + \frac{K}{2}\right) + A \Theta(z) \Theta_1(z) + B H(z) H_1(z),$$

faisons successivement  $z = -K$  et  $z = -iK' - K$ ; nous aurons les deux équations

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, iK' - \frac{K}{2} \right) + A \theta_1, \\ 0 &= -\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, -\frac{K}{2} \right) + \frac{iB}{\sqrt{q}} \theta_1, \end{aligned}$$

qui donnent A et B. Il suffit d'écrire la série qui définit

$$\chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, iK' - \frac{K}{2} \right)$$

pour voir que les termes de cette série sont deux à deux égaux et de signes contraires et que, par suite, le coefficient A est nul. Remplaçant alors A par 0 et B par la valeur que nous venons de trouver, nous aurons

$$\frac{\eta' \theta}{\theta_1 \eta} \frac{\Theta_1^2 H_1}{H} = -\theta_1 \chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, z + iK' + \frac{K}{2} \right) - i\sqrt{q} \chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, -\frac{K}{2} \right) \frac{HH_1}{H},$$

qui est la formule de décomposition cherchée.

Pour la comparer à la formule de M. Biehler (Thèse, p. 37 et 38), remplaçons la fonction  $\chi_2$  par son expression

$$\chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, z + iK' + \frac{K}{2} \right) = -\frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{2n\pi z i}{K}} q^{2n^2} \cot \frac{\pi}{2K} (z + 2niK'),$$

d'où

$$\chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, -\frac{K}{2} \right) = +\frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n^2 - 2n} \tan \frac{(2n-1)\pi K' i}{2K}.$$

Substituant ces séries dans la formule trouvée et remarquant que

$$\frac{2K}{\pi} \eta' = \theta_1 \eta,$$

il vient enfin

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_1} \frac{\Theta_1^2 H_1}{H} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{2n\pi z i}{K}} q^{2n^2} \cot \frac{\pi}{2K} (z + 2niK') \\ &\quad - i \frac{HH_1}{\theta_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{2n-1}{2}} \tan \frac{(2n-1)\pi K' i}{2K}. \end{aligned} \right.$$

La formule de M. Biehler (Thèse, p. 38) est

$$(10) \quad \frac{\theta}{\theta_1} \frac{\Theta_1 H_1}{\Pi} = U^{(2)}(x) - \frac{Z_1^{(2)}(0)}{F_1^{(2)}(0)} \Phi^{(2)}(x);$$

cette formule est valable dans une certaine bande du plan. Si l'on développe en série trigonométrique la première fonction qui figure dans la formule (9), c'est-à-dire

$$- \frac{2K}{\pi} \chi_2 \left( iK' + \frac{K}{2}, z + iK' + \frac{K}{2} \right),$$

développement qui se déduit de celui que j'ai donné dans les *Annales de l'École Normale* [3<sup>e</sup> série, t. II, p. 22, formule (8)], en y remplaçant  $a$  par  $\frac{K}{2}$  et  $x$  par  $z + \frac{K}{2}$ , on retrouve la fonction  $U^{(2)}(x)$  de M. Biehler, dans laquelle  $x = \frac{\pi z}{2K}$ .

Pour comparer les deux seconds termes des deux formules, je remarque d'abord que les deux fonctions appelées par M. Biehler  $F^{(2)}(x)$  et  $F_1^{(2)}(x)$  sont identiques, et que l'on a

$$F^{(2)}(x) = F_1^{(2)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n^2} e^{\frac{2n\pi zi}{K}},$$

en supposant toujours  $x = \frac{\pi z}{2K}$ . D'autre part, on sait, et la méthode des coefficients indéterminés montre immédiatement que l'on a

$$\Theta(z) \Theta_1(z) = A_0 \sum (-1)^n q^{2n^2} e^{\frac{2n\pi zi}{K}} = A_0 F^{(2)}(x);$$

si l'on remplace  $\Theta(z)$  et  $\Theta_1(z)$  par leurs développements en série d'exponentielles et si l'on identifie les termes constants des deux membres, on trouve

$$A_0 = \sum (-1)^n q^{2n^2} = F^{(2)}(0).$$

Donc

$$\Theta(z) \Theta_1(z) = F^{(2)}(0) F^{(2)}(x)$$

et, pour  $z = 0$ ,

$$\theta\theta_1 = [F^{(2)}(0)]^2, \quad F^{(2)}(0) = \sqrt{\theta\theta_1} \quad (1).$$

---

(1) Voir un article de M. Hermite : *Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques* (*Journ. de Mathém. pures et appliquées*, t. IX, p. 4; 1864).

Puis, dans la formule que nous venons de trouver

$$\Theta(z) \Theta_1(z) = F^{(2)}(0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n^2} e^{\frac{2n\pi zi}{K}},$$

remplaçons  $z$  par  $z + iK'$ ; nous avons, après réduction,

$$iH(z) H_1(z) = F^{(2)}(0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{2}} e^{\frac{(2n+1)\pi zi}{K}}.$$

Or la série du second membre définit une fonction que M. Biehler appelle

$$i\Phi^{(2)}(x),$$

comme on le voit en groupant ensemble les termes qui correspondent à des valeurs de  $(2n+1)$  égales et de signes contraires. Donc

$$H(z) H_1(z) = F^{(2)}(0) \Phi^{(2)}(x);$$

comme

$$F^{(2)}(0) = F_1^{(2)}(0) = \sqrt{\theta\theta_1},$$

on a enfin

$$\frac{H(z) H_1(z)}{\theta\theta_1} = \frac{\Phi^{(2)}(x)}{F_1^{(2)}(0)}.$$

Et alors la comparaison des seconds termes des deux formules (9) et (10) donne

$$Z_1^{(2)}(0) = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \operatorname{tang} \frac{(2n-1)\pi K' i}{2K},$$

ce qu'il est aisé de vérifier.

En changeant, dans la formule (9),  $z$  en  $z + K$ ,  $z + iK'$ ,  $z + K + iK'$ , on en déduit trois autres formules dont la comparaison avec celles de la page 38 de la Thèse de M. Biehler donne la définition de la fonction  $Z^{(2)}(x)$ , dans tout le plan, à l'aide d'un élément simple  $\chi_2$ . Ayant ainsi établi les quatre formules d'un groupe, suivant l'expression de M. Biehler, on peut vérifier ou retrouver toutes les autres en se servant des relations linéaires qu'il y a entre les carrés de trois fonctions  $\Theta$ . Ainsi la relation

$$K' H^2(z) + H_1^2(z) = K \Theta_1^2(z)$$

donne

$$\frac{H_1^2(z)}{H(z)} = k \frac{\Theta_1^2(z)}{H(z)} - k' H(z);$$

et en multipliant les deux membres par une des trois fonctions,

$$H_1(z), \quad \Theta(z), \quad \Theta_1(z),$$

on obtient des relations dont chacune exprime une des fonctions de M. Biehler en fonction d'une autre et d'une partie entière.

5. La méthode de détermination de la partie entière que je viens de donner et d'appliquer à quelques exemples est la méthode des coefficients indéterminés. En voici une autre qui permet d'établir la formule de décomposition et de déterminer en même temps la partie entière. Cette méthode est celle qui a été employée par M. Hermite pour les fonctions de première et seconde espèce.

Soit une fonction uniforme  $F(z)$  vérifiant les deux relations

$$F(z + 2K) = F(z), \quad F(z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}} F(z)$$

où  $m$  est un entier positif. L'élément simple  $\chi_m(x, z)$  envisagé comme fonction de  $x$  vérifie les deux relations

$$\begin{aligned} \chi_m(x + 2K, z) &= \chi_m(x, z) \\ \chi_m(x + 2iK', z) &= e^{\frac{m\pi xi}{K}} \chi_m(x, z) - \frac{\pi i}{2K} \left( 1 + e^{\frac{m\pi xi}{K}} \right) g_0^{(m)}(z) \\ &\quad - \frac{\pi i}{K} \sum_{v=1}^{v=m-1} e^{\frac{(m-v)\pi xi}{K}} g_v^{(m)}(z), \end{aligned}$$

dans la seconde desquelles les fonctions entières

$$g_0^{(m)}(z), \quad g_1^{(m)}(z), \quad \dots, \quad g_{m-1}^{(m)}(z)$$

sont définies par les séries

$$g_v^{(m)}(z) = e^{\frac{v\pi zi}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)+2nv},$$

où

$$v = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (1).$$

---

(1) Voir *Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 138 et 147.

Prenons un parallélogramme des périodes PQRS dont les sommets ont pour affixes

$$t_0, \quad t_0 + 2K, \quad t_0 + 2K + 2iK', \quad t_0 + 2iK',$$

$t_0$  désignant une constante; et supposons que, dans ce parallélogramme, la fonction  $F(z)$  n'ait que des pôles simples

$$a, \quad b, \quad \dots, \quad l$$

de résidus

$$A, \quad B, \quad \dots, \quad L;$$

si nous supposons le point  $z$  situé dans ce même parallélogramme PQRS, la fonction de  $x$

$$\chi_m(x, z)$$

admet, dans PQRS, le seul pôle  $x = z$  de résidu  $+1$ .

Considérons alors la fonction de  $x$

$$\Phi(x) = F(x) \chi_m(x, z);$$

cette fonction admet, dans PQRS, les pôles

$$x = a, \quad x = b, \quad \dots, \quad x = l, \quad x = z$$

avec les résidus

$$A \chi_m(a, z), \quad B \chi_m(b, z), \quad \dots, \quad L \chi_m(l, z), \quad F(z),$$

et elle vérifie les deux relations suivantes qui résultent immédiatement de celles que vérifient  $F(x)$  et  $\chi_m(x, z)$ ,

$$\Phi(x + 2K) = \Phi(x),$$

$$\begin{aligned} \Phi(x + 2iK') &= \Phi(x) - \frac{\pi i}{2K} F(x) \left( e^{-\frac{m\pi x i}{K}} + 1 \right) g_0^{(m)}(z) \\ &\quad - \frac{\pi i}{K} F(x) \sum_{v=1}^{v=m-1} e^{-\frac{v\pi x i}{K}} g_v^{(m)}(z). \end{aligned}$$

Cela posé, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{PQRS} \Phi(x) dx,$$

prise sur le contour du parallélogramme, est égale à la somme des

résidus

$$A \chi_m(a, z) + B \chi_m(b, z) + \dots + L \chi_m(l, z) + F(z);$$

mais nous pouvons évaluer directement cette intégrale en remarquant que les parties de l'intégrale relatives aux côtés QR et SP ont une somme nulle, car  $\Phi(x)$  admet la période  $2K$ , et que les parties de l'intégrale relatives aux côtés PQ et RS ont pour somme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_0}^{l_0+2K} [\Phi(x) - \Phi(x+2iK')] dx,$$

c'est-à-dire, d'après la seconde des relations auxquelles satisfait  $\Phi(x)$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4K} g_0^{(m)}(z) \int_{l_0}^{l_0+2K} \left(1 + e^{-\frac{m\pi x i}{K}}\right) F(x) dx \\ & + \frac{1}{2K} \sum_{v=1}^{v=m-1} g_v^{(m)}(z) \int_{l_0}^{l_0+2K} e^{-\frac{v\pi x i}{K}} F(x) dx. \end{aligned}$$

Telle est donc la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{PQRS} \Phi(x) dx;$$

cette valeur est de la forme

$$\lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \dots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z),$$

où  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  désignent des constantes ayant pour valeurs

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{4K} \int_{l_0}^{l_0+2K} \left(1 + e^{-\frac{m\pi x i}{K}}\right) F(x) dx, \\ \lambda_v = \frac{1}{2K} \int_{l_0}^{l_0+2K} e^{-\frac{v\pi x i}{K}} F(x) dx, \end{cases}$$

où

$$v = 1, 2, \dots, (m-1),$$

les intégrations étant faites le long du côté PQ du parallélogramme élémentaire.



En égalant la valeur que nous venons de trouver pour l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{PQRS}} \Phi(x) dx$$

à la somme des résidus de  $\Phi(x)$  dans le parallélogramme PQRS, nous avons la formule de décomposition cherchée

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \dots - L\chi_m(l, z) + G(z)$$

avec

$$G(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \dots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z),$$

les coefficients  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  étant donnés par les intégrales (11). On peut indiquer une signification fort simple de ces coefficients. En effet, comme le côté PQ du parallélogramme ne contient aucun pôle de  $F(x)$ , cette fonction est, dans une certaine bande du plan, limitée par deux parallèles à ce côté PQ, développable par la formule de Fourier en une série de la forme

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{n\pi x i}{K}},$$

où

$$A_n = \frac{1}{2K} \int_{\iota_0}^{\iota_0 + 2K} e^{-\frac{n\pi x i}{K}} F(x) dx.$$

Donc

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} (A_0 + A_m)$$

et

$$\lambda_\nu = A_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, m-1).$$

J'ai supposé, dans ce qui précède, que la fonction  $F(x)$  n'a que des pôles simples; si l'un des pôles, par exemple le pôle  $x = a$ , était d'ordre  $\alpha$ , le résidu de la fonction

$$\Phi(x) = F(x) \chi_m(x, z),$$

relatif à ce pôle, serait de la forme

$$A\chi_m(a, z) + A'D_a\chi_m(a, z) + \dots + A^{(\alpha-1)}D_a^{\alpha-1}\chi_m(a, z);$$

d'ailleurs la détermination de la partie entière  $G(z)$  resterait la même.

donc

$$\lambda_0 = -\frac{i}{n\sqrt[n]{q}},$$

et la formule de décomposition cherchée devient enfin

$$\frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)} = -\frac{1}{\sqrt[n]{q}} \frac{\theta\theta_1}{n'} \chi_1(2K + 2iK', z + iK') - \frac{i}{n\sqrt[n]{q}} \Theta_1(z).$$

Remplaçons la fonction  $\chi_1$  par son développement en série et rappelons-nous la relation

$$\frac{2K}{\pi} n' = \theta\theta_1 n,$$

nous aurons

$$\eta \frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)} = \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n^2} \cot \frac{\pi}{2K} [z + (2n-1)iK'] - \frac{i}{\sqrt[n]{q}} \Theta_1(z).$$

Le second membre devant être une fonction impaire, comme le premier, cherchons à mettre cette propriété en évidence. Pour cela, remplaçons, dans le terme général de la série, la fonction

$$\cot \frac{\pi}{2K} [z + (2n-1)iK']$$

par l'expression identique

$$\frac{e^{-\frac{i\pi z}{2K} - \frac{(2n-1)^2}{2}}}{\sin \frac{\pi}{2K} [z + (2n-1)iK']} + i;$$

alors la partie entière disparaît, et il reste

$$\eta \frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} e^{\frac{v\pi z i}{K}} q^{\frac{v^2}{4}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2K} (z + v iK')},$$

$v$  désignant un *entier impair* qui varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

6. La détermination des coefficients  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  de la partie entière peut aussi être obtenue par une voie plus élémentaire qui a son point de départ dans la proposition suivante :

Soient  $a$  un point situé dans le parallélogramme PQRS et

$$\chi_m(a, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{\frac{n\pi z i}{K}};$$

le développement en série d'exponentielles de la fonction  $\chi_m(a, z)$  dans la bande du plan qui contient le côté PQ du parallélogramme; on a

$$a_0 + a_m = 0, \quad a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, remarquons que, si  $z$  est un point du côté PQ, on a

$$1 > \left| e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} \right| > |q^2|,$$

où la notation  $|x|$  signifie *module* de  $x$ . En effet,  $z$  étant un point du côté PQ, on a

$$a - z = 2\varepsilon K + 2\varepsilon' i K',$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  étant réels, et  $\varepsilon'$  étant positif et plus petit que l'unité. Donc

$$e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} = e^{2\pi\varepsilon i - \frac{2\varepsilon'\pi K'}{K}}$$

et

$$\left| e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} \right| = |q^{2\varepsilon'}|;$$

comme  $\varepsilon'$  est positif et moindre que 1, l'inégalité que nous avons en vue est démontrée.

Cela posé, on a

$$\chi_m(a, z) = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} - q^{2n}}.$$

Prenons dans cette série les termes dans lesquels  $n$  est *positif* et désignons leur somme par P,

$$P = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} - q^{2n}}.$$

Puisque

$$\left| e^{\frac{\pi(z-a)i}{K}} q^{2n} \right| < 1,$$

on aura

$$\frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} - q^{2n}} = \frac{1 + q^{2n} e^{\frac{\pi(z-a)i}{K}}}{1 - q^{2n} e^{\frac{\pi(z-a)i}{K}}} = 1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} e^{\frac{v\pi(z-a)i}{K}} q^{2nv};$$

donc

$$P = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)} + \frac{\pi i}{K} \sum_{n=1, v=1}^{\infty} e^{\frac{(mn+v)\pi zi - v\pi ai}{K}} q^{mn(n-1) + 2nv}.$$

Dans ce développement ne figurent que des puissances positives de  $e^{\frac{\pi zi}{K}}$ ; les coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$  des termes en

$$e^{\frac{\pi zi}{K}}, e^{\frac{2\pi zi}{K}}, \dots, e^{\frac{(m-1)\pi zi}{K}}$$

sont nuls et celui de  $e^{\frac{m\pi zi}{K}}$  est

$$a_m = \frac{\pi i}{2K}.$$

Prenons maintenant, dans la série qui définit  $\chi_m(a, z)$ , les termes dans lesquels  $n$  est nul ou négatif et désignons par N leur somme

$$N = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} - q^{2n}};$$

mais on peut écrire

$$\frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} - q^{2n}} = - \frac{1 + q^{-2n} e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}}{1 - q^{-2n} e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}} = -1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} e^{\frac{v\pi(a-z)i}{K}} q^{-2nv}.$$

Donc

$$N = - \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)} - \frac{\pi i}{K} \sum_{n=0, v=1}^{\infty} e^{\frac{(mn-v)\pi zi + v\pi ai}{K}} q^{mn(n-1) - 2nv}.$$

Dans ce développement ne figurent que des puissances négatives ou nulles de

$$e^{\frac{\pi zi}{K}};$$

le terme indépendant de  $e^{\frac{\pi zi}{K}}$  est

$$\alpha_0 = -\frac{\pi i}{2K}.$$

Donc enfin, dans le développement de la fonction  $\chi_m(a, z)$ , qui est égal à  $P + N$ , on a

$$\alpha_0 + \alpha_m = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0.$$

Ce théorème étant établi, reprenons la formule de décomposition en éléments simples

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \dots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

où

$$G(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \dots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z).$$

Développons les deux membres de la formule de décomposition par la série de Fourier. On a

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{n\pi zi}{K}}, \\ \chi_m(a, z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{\frac{n\pi zi}{K}}, \\ \chi_m(b, z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n e^{\frac{n\pi zi}{K}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \chi_m(l, z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} l_n e^{\frac{n\pi zi}{K}}; \end{aligned}$$

quant à  $G(z)$ , il résulte des développements de

$$g_0^{(m)}(z), \quad g_1^{(m)}(z), \quad \dots, \quad g_{m-1}^{(m)}(z)$$

que les coefficients des puissances 0, 1, 2, ...,  $m$  de  $e^{\frac{\pi zi}{K}}$  dans  $G(z)$  sont

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_{m-1}, \quad \lambda_0.$$

On a donc, en identifiant les deux membres de la formule de décom-

position et se rappelant que les coefficients

$$\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \dots, & a_{m-1}, \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_{m-1}, \\ \dots & \dots & \dots, & \dots, \\ l_1, & l_2, & \dots, & l_{m-1} \end{array}$$

sont *nuls*,

$$A_1 = \lambda_1, \quad A_2 = \lambda_2, \quad \dots, \quad A_{m-1} = \lambda_{m-1};$$

puis

$$\begin{aligned} A_0 &= -A a_0 - B b_0 - \dots - L l_0 + \lambda_0, \\ A_m &= -A a_m - B b_m - \dots - L l_m + \lambda_0; \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant et tenant compte des relations

$$\begin{aligned} a_0 + a_m &= 0, & b_0 + b_m &= 0, & \dots, & l_0 + l_m &= 0, \\ \lambda_0 &= \frac{A_0 + A_m}{2}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les valeurs précédemment obtenues pour  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ .



---

# DEUX LEÇONS DE CINÉMATIQUE,

PAR M. JULES TANNERY,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1).

---

Les formules et les constructions qui permettent de calculer ou de construire les éléments relatifs à la courbure des trajectoires des points d'un corps solide dont un plan glisse sur un plan fixe ou dont un point reste fixe s'établissent habituellement par des procédés qui ne mettent pas nettement en évidence la généralité de ces formules ou de ces constructions. Il en est tout autrement quand on déduit celles-ci des propriétés relatives à l'accélération. Au point de vue cinématique, cette voie est d'ailleurs la plus naturelle. Dans cet ordre d'idées, les démonstrations se font parallèlement et d'une façon très simple, soit qu'on interprète les formules analytiques, soit qu'on reste dans le domaine de la pure Géométrie, en s'appuyant sur quelques principes de la Géométrie des segments de droite. Ces principes, dont la généralité ressort facilement, sont bien connus; ils ont été développés par différents auteurs, principalement par Möbius. Toutefois, j'ai cru devoir en reprendre ici l'exposé systématique, afin de bien fixer le sens des notations que j'emploierai. J'ai d'ailleurs, dans cette première Partie, supprimé celles des démonstrations qui ne présentaient aucune difficulté.

## I.

Un segment de droite est entièrement défini si l'on se donne son origine A et son extrémité B; le sens de ce segment est le sens dans

---

(1) Cet article a été rédigé pour répondre à une question posée dans le programme d'agrégation pour 1886. Il est, sauf de légères modifications, la reproduction de Leçons faites à la Sorbonne en 1880.

lequel il serait parcouru par un mobile allant du point A au point B; un tel segment se représente par AB ou  $+AB$ ; les symboles  $-AB$ , BA,  $+BA$  ont la même signification, ils représentent un segment dont l'origine est B et l'extrémité A. La droite indéfinie sur laquelle est situé le segment AB est dite sa ligne d'action. Deux segments sont équipollents si leurs lignes d'action sont parallèles, si leurs sens sont les mêmes, si enfin ils sont égaux. L'égalité

$$AB = A'B'$$

veut dire que les deux segments AB, A'B' sont équipollents.

En désignant par  $n$  un nombre positif ou négatif, je représenterai par  $nAB$  l'un quelconque des segments équipollents au segment AB' ayant même ligne d'action que le segment AB, même sens ou sens contraire, suivant que  $n$  est positif ou négatif, tel enfin que le rapport des longueurs AB' et AB soit égal à la valeur absolue de  $n$ .

Si la ligne d'action d'un segment est parallèle à une droite OX, sur laquelle on ait choisi une *direction* positive, si l'on a en outre choisi une unité de longueur, on peut représenter ce segment et tous les segments équipollents par un *nombre* dont la valeur absolue est la mesure de la longueur du segment considéré, et le signe  $+$  ou  $-$  selon que le sens de ce segment est ou non le sens de la direction positive. Si  $a$  est le nombre qui représente ainsi le segment considéré et si PQ est un segment dont la ligne d'action soit OX, dont le sens soit celui de la direction positive choisie sur OX, qui enfin soit égal à l'unité de longueur, les segments représentés d'après ces conventions par le nombre  $a$  et par le symbole  $aPQ$  sont équipollents. Le nombre  $a$  représente ainsi des unités d'une espèce particulière qui ne peuvent se réduire avec des unités d'une autre espèce. Si  $a$  désigne un nombre quelconque, positif ou négatif, en parlant d'un segment égal à  $a$  porté sur une direction déterminée ou parallèlement à cette direction, j'entendrai parler d'un segment AB qui, d'après les conventions précédentes et en regardant la direction considérée comme la direction positive, soit représenté ou *mesuré* par le nombre  $a$ . Inversement, quand aucune ambiguïté n'est à craindre, on peut désigner par AB non le segment lui-même, mais le nombre positif ou négatif qui le mesure.

Un segment dont l'origine se confond avec l'extrémité est dit *nul*;



sa direction n'est pas déterminée; on le représente par le nombre zéro.

Si  $AA'$ ,  $BB'$  sont deux segments quelconques; si  $oa$  est un segment équipollent à  $AA'$ ,  $ab$  un segment équipollent à  $BB'$ , le segment  $ob$  ou tout segment équipollent est dit la *somme géométrique des segments*  $AA'$ ,  $BB'$ ; cette somme se représente par le symbole

$$AA' + BB';$$

on a d'ailleurs

$$AA' + BB' = BB' + AA'.$$

Le symbole

$$AA' - BB'$$

représente la somme géométrique des segments  $AA'$  et  $-BB' = B'B$ ; cette somme est aussi ce qu'on appelle la *différence géométrique des deux segments*  $AA'$ ,  $BB'$ . On a

$$AA' - AA' = AA' + A'A = 0.$$

De la notion de somme géométrique de deux segments, on s'élève à la notion de somme géométrique de trois, quatre, ... segments. La somme géométrique d'un nombre quelconque d'éléments ne change pas quand on modifie l'ordre de ces éléments; au lieu d'ajouter géométriquement à un segment la somme géométrique de plusieurs segments, on peut lui ajouter successivement ces divers segments.

Si  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... sont des segments quelconques et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... des nombres abstraits quelconques, le symbole

$$\alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \dots$$

représentera la somme géométrique des segments  $\alpha AA'$ ,  $\beta BB'$ ,  $\gamma CC'$ , ... définis comme précédemment. Étant donnée une égalité géométrique (ou équipollence) exprimant qu'un certain segment géométrique est équipollent à un autre segment ou à la somme géométrique de plusieurs autres, on peut toujours faire passer tous les termes dans un même membre et écrire ainsi cette égalité sous la forme

$$(1) \quad \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \dots = 0;$$

elle exprime alors qu'un certain polygone, dont les côtés sont équipol-

lents aux segments  $\alpha AA'$ ,  $\beta BB'$ ,  $\gamma CC'$ , ..., est fermé. Si cette égalité est vraie, il en est de même de l'égalité

$$\lambda \alpha AA' + \lambda \beta BB' + \lambda \gamma CC' + \dots = 0,$$

où  $\lambda$  désigne un nombre abstrait quelconque et où  $\lambda \alpha$ ,  $\lambda \beta$ ,  $\lambda \gamma$ , ... désignent les nombres abstraits, positifs ou négatifs, obtenus en multipliant, suivant les règles de l'Algèbre, les nombres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... par  $\lambda$ ; cela résulte de la considération de deux figures homothétiques, directement ou inversement, selon que  $\lambda$  est positif ou négatif.

Une égalité telle que (1) a un sens purement géométrique; si les lignes d'action des segments  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... sont toutes parallèles à une même droite sur laquelle on a choisi une direction positive, les segments  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... pourront être représentés par des nombres, en remplaçant les symboles  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... par ces nombres; en effectuant, au sens de l'Algèbre, les multiplications et les additions, l'égalité subsistera au sens algébrique.

Si l'on projette tous les segments  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... sur un axe quelconque  $OX$ , au moyen de plans parallèles entre eux et non parallèles à cet axe; si l'on désigne par  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $c$ ,  $c'$ , ... les projections des points  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$ ,  $C$ ,  $C'$ , ...; les segments  $\overline{aa'}$ ,  $\overline{bb'}$ ,  $\overline{cc'}$ , ..., dont la ligne d'action est  $OX$ , sont dits les projections sur cet axe des segments  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ...; une relation géométrique entre ces segments, telle que la relation

$$\alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \dots = 0,$$

entraîne la relation suivante entre les projections

$$\alpha \overline{aa'} + \beta \overline{bb'} + \gamma \overline{cc'} + \dots = 0;$$

cette dernière relation peut prendre un sens algébrique si l'on a choisi sur l'axe  $OX$  une direction positive, si l'on remplace les segments  $\overline{aa'}$ ,  $\overline{bb'}$ ,  $\overline{cc'}$ , ... par les nombres qui les mesurent, et si l'on effectue, au sens algébrique, les opérations indiquées.

Si l'on prend dans l'espace trois axes de coordonnées  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ , en parlant de la projection d'un segment sur l'un de ces axes, on entend que cette projection est effectuée au moyen de plans parallèles aux deux autres. Un segment quelconque est la somme géométrique de

ses projections sur ces trois axes; si  $a, b, c$  sont trois nombres représentant trois segments portés respectivement sur les directions  $ox, oy, oz$ , la somme géométrique de ces trois segments est un segment équivalent au segment dont l'origine est le point  $o$ , et l'extrémité le point dont les coordonnées sont  $a, b, c$ ; en parlant de la direction définie par les trois nombres  $a, b, c$ , on entend la direction de ce dernier segment. Des conventions analogues, sur lesquelles il est inutile d'insister, sont adoptées en Géométrie plane.

Si l'on désigne les projections des segments  $AA', BB', CC', \dots$  sur les trois axes de coordonnées  $ox, oy, oz$ , respectivement par  $a, b, c, \dots$  pour l'axe des  $x$ , par  $a_1, b_1, c_1, \dots$  pour l'axe des  $y$ , par  $a_2, b_2, c_2, \dots$  pour l'axe des  $z$ , l'égalité géométrique

$$(1) \quad \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \dots$$

entraîne les égalités (géométriques ou algébriques)

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots = 0, \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 + \dots = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 + \dots = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, ces trois égalités entraînent l'égalité géométrique (1); il suffit, pour le voir, de donner aux égalités (2) la signification géométrique et de les ajouter géométriquement en remarquant que la somme géométrique des segments  $\alpha a, \alpha a_1, \alpha a_2$  est le segment  $\alpha.AA' \dots$

On dit qu'un plan est orienté <sup>(1)</sup> si l'on a choisi dans ce plan un sens pour les rotations positives. Ayant pris dans le plan un point arbitraire et considérant une demi-droite <sup>(2)</sup>, limitée à ce point et tournant autour en restant dans le plan, on définit l'un des deux sens dans lesquels elle peut tourner comme étant le sens positif; on con-

(1) Cette dénomination a été introduite par M. Darboux; voir à ce sujet, dans le Tome XXIII des *Mathematische Annalen*, un article de M. Stephanos, *Mémoire sur la représentation*, etc., p. 337. Il convient aussi de rappeler les notions de *semi-plan*, *semi-droite*, *cycle*, etc., introduites et développées par M. Laguerre dans de nombreuses et intéressantes Communications.

(2) L'expression *demi-droite* sera employée dans la suite pour désigner une droite indéfinie dans un sens et limitée de l'autre à un point; une demi-droite définit une direction.

De même l'expression *demi-plan* désignera une portion de plan s'étendant indéfiniment d'un côté d'une droite.

vient, en outre, de dire de deux demi-droites situées dans le même plan qui tournent autour de leurs extrémités, en restant parallèles et de même sens, qu'elles tournent dans le même sens; le sens des rotations positives est alors défini pour tous les points du plan. Si l'on veut, on peut imaginer un observateur, les pieds appuyés sur le plan et regardant tourner une demi-droite à ses pieds; lorsqu'elle passe devant lui, elle va de sa droite vers sa gauche, ou de sa gauche vers sa droite; l'un de ces deux sens correspond aux rotations positives; si l'observateur se transporte en un autre point du plan, en restant sur la même face du plan, le sens des rotations positives reste le même pour lui.

Étant donné dans un plan l'angle  $AOB$ , j'appellerai sens de  $OA$  vers  $OB$  le sens dans lequel une demi-droite limitée au point  $O$ , coïncidant d'abord avec  $OA$ , doit tourner autour du point  $O$  pour venir coïncider avec  $OB$ , en décrivant l'angle  $AOB$  (moindre que deux droits). Deux angles  $AOB$ ,  $A'O'B'$ , situés dans le même plan, ont la même disposition si le sens de  $OA$  vers  $OB$  est le même que le sens de  $O'A'$  vers  $O'B'$ ; dans ce cas, on peut déplacer et déformer d'une façon continue l'angle  $A'O'B'$ , sans le faire sortir du plan, sans que ses côtés viennent se placer l'un sur l'autre ou dans le prolongement l'un de l'autre, de manière à le faire coïncider avec  $AOB$ , le côté  $O'A'$  coïncidant avec  $OA$ , et le côté  $O'B'$  avec  $OB$ .

Si le plan qui contient l'angle  $AOB$  est orienté, on dit que cet angle a la disposition directe ou la disposition inverse suivant que le sens de  $OA$  vers  $OB$  est ou non le sens des rotations positives.

Si un plan est rapporté à un système d'axes coordonnés  $ox$ ,  $oy$ , il est, par cela même, orienté; le sens des rotations positives est le sens de  $ox$  vers  $oy$ ; si les deux directions  $oA$ ,  $oA'$ , dont l'origine coïncide avec l'origine des coordonnées, sont définies, comme il a été expliqué plus haut, par les quantités  $a$ ,  $b$ , d'une part,  $a'$ ,  $b'$ , de l'autre, l'angle  $AoA'$  aura la disposition directe ou la disposition inverse (la disposition de l'angle  $xoy$  ou de l'angle  $yox$ ) suivant que le déterminant  $ab' - a'b$  sera positif ou négatif.

Si  $A$ ,  $B$  sont deux directions situées dans un plan orienté, pour définir l'angle  $(A, B)$  de ces deux directions, on procède comme il suit : on mènera par un point arbitraire  $o$  du plan deux demi-droites  $oa$ ,  $ob$  parallèles aux deux directions  $A$ ,  $B$  et de même sens; qu'on ima-

gine ensuite une demi-droite ayant son origine en  $o$  et coïncidant d'abord avec  $oa$ , et sur cette demi-droite un point  $m$  tel que le segment  $om$  ait la direction  $oa$  et soit égal à l'unité de longueur; si cette demi-droite tourne toujours dans le même sens autour du point  $o$ , et si on l'arrête à un moment où elle coïncide avec la direction  $ob$ , le nombre qui mesure la longueur de l'arc décrit par le point  $m$ , affecté du signe  $+$  ou du signe  $-$ , suivant que l'on a tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif, est ce que l'on appelle l'angle  $(A, B)$ . Cet angle admet une infinité de déterminations; toutes ces déterminations forment une progression arithmétique, indéfinie dans les deux sens, dont la raison est  $2\pi$ ; l'une d'elles est en valeur absolue moindre que  $\pi$ ; cette valeur absolue est la mesure de l'angle des deux directions, tel qu'on le considère en Géométrie. J'emploierai le symbole  $(A, B)$  pour désigner l'une quelconque des déterminations précédemment définies; on a alors

$$(A, B) + (B, A) = 2n\pi,$$

en désignant par  $n$  un nombre entier positif ou négatif.

Si l'angle  $(A, B)$  n'est pas un multiple de  $\pi$ , l'angle  $aob$ , défini plus haut et considéré au point de vue géométrique, a la disposition directe ou inverse, suivant que celle des déterminations de  $(A, B)$ , qui a la plus petite valeur absolue, est un nombre positif ou négatif; on peut dire alors que l'angle  $(A, B)$ , considéré non comme un nombre, mais comme une figure, a, suivant les cas, la disposition directe ou la disposition inverse.

Si l'on se donne la figure  $(A, B)$ , les lignes trigonométriques de l'angle  $(A, B)$  sont entièrement déterminées.

En considérant trois directions quelconques  $A, B, C$  dans un plan orienté, on a

$$(A, B) + (B, C) + (C, A) = 2n\pi,$$

$n$  étant un nombre entier positif ou négatif.

Lorsqu'un plan  $(P)$  est rapporté à des axes coordonnés  $ox, oy$ , on rapporte souvent les directions contenues dans ce plan à la direction  $ox$ ; on dit, dans ce sens, qu'une direction  $oA$  est définie par l'angle  $\theta$ , quand l'angle  $(ox, oA)$  est égal à  $\theta$ .

Si les deux directions  $A, B$ , sans être situées dans un plan orienté,

sont parallèles à un tel plan, on peut conserver, pour l'angle (A, B) de ces deux directions, la définition précédente.

Si, dans l'espace, les deux directions A, B ne sont pas parallèles à un plan orienté, l'angle de ces deux directions devra encore être regardé comme admettant une infinité de déterminations; on les obtiendra toutes en orientant un plan parallèle à ces deux directions, d'abord d'une façon, puis de l'autre; en désignant l'une quelconque de ces déterminations par  $\alpha$ , elles seront toutes comprises dans la formule

$$2n\pi \pm \alpha,$$

où le nombre  $n$  doit prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives. Il n'y a pas lieu, dans ce cas, de distinguer l'angle des deux directions A, B de l'angle des deux directions B, A; le cosinus de l'angle de ces deux directions, supposées données, est entièrement déterminé; le sinus et la tangente sont déterminés au signe près.

Considérons deux droites sur lesquelles on ait respectivement choisi deux directions positives OX, O'X'; imaginons un segment égal à l'unité de longueur porté sur OX, dont le sens, enfin, soit celui de la direction OX; soit  $i$  le nombre positif ou négatif qui mesure la projection de ce segment sur O'X', projection effectuée au moyen de plans parallèles à un plan fixe P. Si un segment porté sur OX ou parallèlement à OX est mesuré par le nombre  $\alpha$ , le nombre  $\alpha'$  qui mesure la projection de ce segment sur O'X', faite parallèlement au plan P, sera lié au nombre  $\alpha$  par la relation

$$\alpha' = \alpha i.$$

En particulier, si les projections sont orthogonales, le nombre  $i$  sera le cosinus de l'angle des deux directions OX, O'X'.

On dit que l'espace est *orienté* si l'on a choisi un sens pour les *rotations directes*.

Supposons que sur une droite on ait choisi une direction; imaginons un observateur couché sur la droite, traversé des pieds à la tête par cette direction et enfin un demi-plan limité à la droite et tournant autour; quand l'observateur voit ce plan passer devant lui, il peut le voir aller de sa droite vers sa gauche ou de sa gauche vers sa droite; l'un de ces deux sens sera dit *direct*; dès que ce sens aura été choisi,

une direction quelconque étant donnée sur une droite quelconque, on saura ce qu'il faut entendre par un plan qui tourne autour de cette droite dans le sens direct ou dans le sens indirect, relativement à cette direction; si, sur une même droite, on considère deux directions opposées, les sens des rotations directes qui leur correspondent sont évidemment contraires.

Considérons un trièdre OABC et imaginons un observateur ayant les pieds en O, traversé des pieds à la tête par la direction OC et regardant la face AOB; imaginons enfin un demi-plan limité à la droite indéfinie (C) sur laquelle se trouve la direction OC, et s'appuyant d'abord sur la face AOC; lorsque ce plan tourne autour de la droite (C) de manière à venir s'appliquer sur la face BOC en décrivant l'angle dièdre OC, moindre que deux droits, l'observateur le voit tourner dans un certain sens (de gauche à droite ou de droite à gauche); c'est le sens que j'appellerai sens de OA vers OB pour l'observateur couché sur la direction OC. Pour le même observateur, le sens de OB vers OA est contraire au sens de OA vers OB; pour les observateurs couchés suivant les directions OA, OB, OC, les sens respectifs de OB vers OC, de OC vers OA, de OA vers OB sont les mêmes.

Deux trièdres OABC, O'A'B'C' ont la même disposition si, pour l'observateur couché suivant OC, le sens de OA vers OB est le même que le sens de O'A' vers O'B' pour l'observateur couché suivant O'C'; s'il en est ainsi, on peut, en déplaçant et en déformant d'une manière continue le trièdre O'A'B'C', sans que les trois arêtes soient jamais dans un même plan, l'amener à coïncider avec le trièdre OABC, O'A' coïncidant avec OA, O'B' avec OB, O'C' avec OC; réciproquement, si cette coïncidence est possible de cette manière, les deux trièdres ont même disposition.

Les trois trièdres OABC, OBAC, OCAB ont une même disposition, différente de celle des trièdres OACB, OCBA, OBAC.

Si l'espace est orienté, on dira que le trièdre OABC a la disposition directe ou inverse, suivant que, pour l'observateur couché suivant OC, le sens de OA vers OB est direct ou non.

Si l'espace est rapporté à trois axes de coordonnées  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ , il est orienté par cela même; le sens des rotations directes est le sens de OX vers OY pour l'observateur couché suivant OZ.

Un trièdre a la disposition directe ou inverse, suivant qu'il a ou non la disposition du trièdre  $oxyz$ ; si les trois directions  $OA, OA', OA''$ , dont l'origine est à l'origine des coordonnées, sont définies respectivement par les quantités  $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ , la disposition du trièdre  $OAA'A''$  sera directe ou inverse suivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

sera positif ou négatif. Si, en effet, on déplace d'une façon continue les directions  $OA, OA', OA''$ , les quantités  $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$  varieront d'une façon continue; le déterminant précédent ne pourra changer de signe et s'annuler que si les trois directions viennent dans un même plan; enfin, il est positif quand  $OA, OA', OA''$  coïncident respectivement avec  $ox, oy, oz$ . En particulier, si ces axes sont rectangulaires et si les trois directions  $OA, OA', OA''$  forment un trièdre trirectangle à disposition directe, si les neuf quantités  $a, b, c, \dots$  sont les cosinus directeurs de ces directions, le déterminant sera égal à  $+1$ , et chacun de ses éléments sera égal au mineur correspondant.

Supposons toujours l'espace orienté. Considérons un plan (P) et une direction (D) non parallèle au plan; imaginons un demi-plan limité à la droite sur laquelle se trouve la direction (D) et tournant autour de cette droite, relativement à cette direction, dans le sens direct; la trace de ce plan mobile sur le plan (P) tournera dans un certain sens autour d'un point de (P); ce sens pourra être pris pour le sens des rotations positives dans le plan (P); si l'on a fait cette convention, on dira que l'orientation du (P) correspond à la direction (D). Le cas le plus utile à considérer est celui où la direction (D) est perpendiculaire au plan. Par exemple, on peut orienter tous les plans tangents à une sphère par cette condition que, pour chacun d'eux, l'orientation corresponde à la direction qui va du centre de la sphère au point de contact.

Inversement, si l'on se donne un plan orienté (P), on pourra, sur chaque droite ( $d$ ) non parallèle au plan (P), choisir une direction déterminée (D), qui corresponde à l'orientation du plan. Si l'on



marche dans une telle direction en partant d'un point du plan (P), on pourra dire que l'on va au-dessus du plan (P); les deux régions de l'espace situées l'une au-dessus du plan orienté (P), l'autre au-dessous, se trouvent ainsi nettement distinguées.

Si OA, OB sont deux directions situées dans un plan orienté (P), si OC est une direction qui corresponde à l'orientation du plan (P), le trièdre OABC aura ou non la disposition directe suivant que, dans le plan (P), l'angle AOB a ou non la disposition directe.

Étant donnés deux plans orientés (P), (Q), non perpendiculaires entre eux, on dira que les orientations de ces deux plans sont les mêmes, si les directions perpendiculaires aux plans (P), (Q) qui correspondent aux orientations de ces plans font entre elles un angle aigu.

Soient AB un segment et O un point : le segment OC, dont la ligne d'action est perpendiculaire au plan qui passe par le point O et la droite AB, dont la direction OC est telle que le trièdre OABC ait la disposition directe, dont la longueur enfin est mesurée par un nombre (positif) égal au produit des deux nombres (positifs) qui mesurent l'un la longueur du segment AB, l'autre la distance du point O à la ligne d'action de ce segment, est dit le moment du segment AB par rapport au point O; la même dénomination s'applique à tout segment équipollent à OC. On peut dire que le nombre (positif) qui mesure la longueur OC est égal au double du nombre qui mesure l'aire du triangle AOB.

Les moments des segments AB, BA, par rapport au point O, sont égaux et opposés.

Supposons que sur la ligne d'action du segment AB on ait choisi une direction positive; soit  $\alpha$  le nombre positif ou négatif qui mesure le segment AB. Si du point O on abaisse, sur la ligne d'action du segment AB, une perpendiculaire OO', puis que l'on fasse tourner, d'un angle droit, autour de la ligne d'action de AB, dans le sens direct correspondant à la direction positive choisie sur cette ligne, le demi-plan que limite cette ligne et qui contient le point O, le segment O'O viendra occuper une position O'O, ; le moment du segment AB par rapport au point O sera équipollent au segment  $\alpha \cdot O'O$ .

Le moment de AB par rapport au point O est nul si le point O est

situé sur la ligne d'action du segment AB, ou si le segment AB est nul ; il ne peut être nul que dans ces deux cas.

Si un segment se déplace sur sa ligne d'action, en restant d'ailleurs équipollent à lui-même, son moment par rapport à un point fixe quelconque ne change pas.

Si le plan des trois points AOB est orienté et si sur la perpendiculaire à ce plan on prend comme direction positive la direction correspondante à l'orientation du plan, le nombre positif ou négatif qui mesure alors le moment de AB par rapport au point O n'est autre chose que ce qu'on appelle, dans les Traités élémentaires, *moment du segment AB* par rapport au point O.

Lorsqu'il s'agira de points situés dans un plan orienté, il n'y a aucun inconvénient à employer le mot *moment* pour désigner soit un segment de droite, comme dans la première définition adoptée, soit un nombre positif ou négatif, comme on le fait habituellement. Si l'on sous-entend, comme on le fera dans la suite, que la direction positive, perpendiculaire au plan, sur laquelle est porté le segment, correspond à l'orientation du plan, cela revient à n'employer qu'un même symbole pour désigner un segment et le nombre positif ou négatif qui le représente, d'après les conventions antérieurement adoptées.

Je désignerai dans ce qui suit par le symbole (ABO) le moment du segment AB par rapport au point O ; les trois segments (ABO), (BOA), (OAB) sont équipollents ; il en est de même des segments (BAO), (AOB), (OBA), qui sont égaux et opposés aux précédents.

Le moment d'un segment AB par rapport à une droite D est la projection orthogonale sur cette droite du moment du segment AB par rapport à l'un quelconque O de ses points ; c'est encore, si l'on veut, le moment par rapport au point O de la projection orthogonale A'B' du segment AB sur un plan mené par le point O perpendiculairement à la droite D ; l'équivalence manifeste de ces deux définitions montre bien que la première est, comme la seconde, indépendante du point O. Si l'on a choisi sur la droite D une direction positive, le moment de AB par rapport à la droite D sera mesuré par un nombre positif ou négatif. Le moment d'un segment par rapport à un point O est la somme géométrique des moments de ce segment par rapport à trois droites rectangulaires passant par ce point.

Étant donnés dans l'espace un système quelconque de segments et un point  $O$ , on appelle *moment résultant* du système par rapport au point  $O$  la somme géométrique des moments par rapport à ce point des divers segments qui composent le système.

Considérons d'abord un système de segments tels que leurs lignes d'action passent par un même point ; je conviendrai d'appeler *résultante* de ces segments un segment équipollent à la somme géométrique des segments donnés et dont la ligne d'action passe par le point commun aux lignes d'action de tous ces segments.

Étant donné un système de segments, tels que leurs lignes d'action passent par un même point, le moment résultant de ce système par rapport à un point quelconque est équipollent au moment, par rapport au même point, de la résultante du système.

Si l'on admet ce théorème, on voit, en projetant orthogonalement les moments sur une droite passant par le point par rapport auquel on prend les moments, que la somme géométrique des moments des segments du système considéré, par rapport à une droite quelconque, est égale au moment, par rapport à la même droite, de la résultante du système.

Inversement, si ce second théorème était établi, le premier en résulterait immédiatement, puisqu'il serait prouvé que les projections sur une droite de direction quelconque des deux segments dont on a à prouver l'équipollence sont deux segments équipollents. La démonstration du premier théorème est donc ramenée à celle du second, qui va résulter facilement de la remarque suivante.

Soit  $(P)$  un plan orienté, soient dans ce plan  $AA_1$  un segment et  $O$  un point ; soit, toujours dans le plan,  $OX$  une direction telle que l'angle  $(OA, OX)$  soit égale à  $+\frac{\pi}{2}$  ; considérons  $OX$  comme la direction positive choisie sur la perpendiculaire à  $OA$  ; la projection  $Oa_1$  du segment  $AA_1$  sur cette droite sera représentée d'après nos conventions par un nombre positif ou négatif ; soit enfin  $r$  le nombre positif qui mesure la longueur  $OA$  ; on aura

$$(AA_1, O) = r \times Oa_1,$$

en désignant par  $(AA_1, O)$ ,  $Oa_1$ , les *nombre*s positifs ou négatifs qui

représentent, d'après nos conventions, les segments que désignent les mêmes symboles.

Ceci posé, considérons dans le plan (P) des segments en nombre quelconque dont les lignes d'action passent par un même point A ; on peut, pour l'évaluation de leurs moments, supposer que tous ces segments aient pour origine le point A ; désignons-les alors par  $AA_1$ ,  $AA_2$ , ...,  $AA_n$  ; soit AS leur résultante ; soient toujours O le point par rapport auquel on prend les moments et OX la direction telle que l'angle (OA, OX) soit égal à  $+\frac{\pi}{2}$  ; on aura, en adoptant toujours les mêmes conventions et en désignant par  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_n$ ,  $s$  les projections sur OX des points  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_n$ , S,

$$\begin{aligned}(AA_1O) &= r \times Oa_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ (AA_nO) &= r \times Oa_n, \\ (ASO) &= r \times Os, \\ Os &= Oa_1 + Oa_2 + \dots + Oa_n.\end{aligned}$$

On en conclut

$$(ASO) = (AA_1O) + (AA_2O) + \dots + (AA_nO).$$

Cette égalité est une égalité entre des nombres ; elle exprime ce fait géométrique que le moment de la résultante par rapport à la perpendiculaire au plan (P) menée par le point O est égale à la somme géométrique des moments par rapport à la même droite des éléments du système. C'est, dans le cas particulier où tous les segments sont dans un même plan, le théorème dont on a besoin.

Si l'on considère maintenant un système quelconque de segments dont les lignes d'action passent par un même point A et une droite quelconque (D), il suffira, pour obtenir le théorème général, d'appliquer le théorème particulier que l'on vient de démontrer au système de segments formés par les projections orthogonales des segments donnés sur un plan (P) perpendiculaire à la droite (D), en prenant les moments par rapport au point O où la droite (D) perce le plan (P).

Soient AA, un segment, O, O' deux points quelconques ; la différence géométrique  $(AA, O') - (AA, O)$  entre les moments du segment AA, par rapport aux points O' et O est égale au moment  $(Oa, O')$  par

rapport au point  $O'$  d'un segment  $Oa_1$  équipollent à  $AA_1$  et ayant le point  $O$  pour origine.

Soit en effet  $A\omega$  un segment équipollent à  $OO'$  et ayant pour origine le point  $A$ ;  $AO'$  étant la résultante des deux segments  $A\omega$  et  $AO$ , on aura, en donnant aux signes  $=$ ,  $+$ ,  $-$  le sens géométrique,

$$(AO'A_1) = (A\omega A_1) + (AOA_1);$$

d'ailleurs

$$(AA_1O') = - (AO'A_1),$$

$$(AA_1O) = - (AOA_1).$$

$$(AA_1\omega) = - (A\omega A_1);$$

donc

$$(AA_1O') - (AA_1O) = (AA_1\omega).$$

Mais, comme on peut passer de la figure formée par les trois points  $A, A_1, \omega$  à la figure formée par les trois points  $O, a_1, O'$  par une translation égale à  $AO$ , il est clair que le segment  $(AA_1\omega)$  est équipollent au segment  $(Oa_1O')$  et le théorème est démontré.

Il résulte de là que, si l'on considère un système quelconque  $(\Sigma)$  de segments et deux points  $O$  et  $O'$ , la différence géométrique entre les moments résultants de ce système par rapport aux points  $O'$  et  $O$  sera égale au moment par rapport à  $O'$  d'un segment équipollent à la somme géométrique des éléments de  $(\Sigma)$  et dont la ligne d'action passe par le point  $O$ . En particulier, si la somme géométrique des éléments de  $(\Sigma)$  est nulle, le moment résultant de  $(\Sigma)$  par rapport à un point est indépendant de ce point. C'est ce qui arrive, lorsque  $(\Sigma)$  se réduit à un *couple*, c'est-à-dire à deux segments dont les lignes d'action sont parallèles, qui ont des longueurs égales et des sens opposés. Les moments résultants d'un couple par rapport à deux points quelconques sont équipollents; ce moment constant, équipollent par exemple au moment de l'un des éléments du couple par rapport à un point situé sur la ligne d'action de l'autre, est ce qu'on appelle l'*axe* du couple.

Deux systèmes de segments  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma')$  sont dits *équivalents* si la somme géométrique des éléments de l'un est équipollente à la somme géométrique des éléments de l'autre, et si, en outre, le moment résultant de l'un par rapport à un point  $O$  est équipollent au moment résultant de l'autre par rapport au même point.

Il résulte du théorème précédent que cette définition ne dépend pas du choix du point O.

Deux couples dont les axes sont équipollents constituent deux systèmes équivalents.

Un ensemble de couples est équivalent à un couple dont l'axe serait la somme géométrique des axes des couples donnés.

Enfin un système quelconque est équivalent au système que forment, d'une part, un couple dont l'axe est le moment résultant du système par rapport à un point arbitraire O, de l'autre, un segment équipollent à la somme géométrique des éléments du système et dont la ligne d'action passe par le point O. Si ce point peut être pris de manière que le moment résultant soit nul, le système est équivalent à un segment unique qui est dit la *résultante* du système.

Supposons que l'espace soit rapporté à des axes coordonnés rectangulaires  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ , et soient  $A_1$ ,  $A_2$  deux points ayant pour coordonnées respectives  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ;  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ : le moment du segment  $A_1A_2$  par rapport à l'origine  $o$  sera le segment qui va du point  $o$  au point I dont les coordonnées sont

$$y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad z_1 x_2 - z_2 x_1, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

la direction  $oI$  est en effet perpendiculaire aux deux directions  $oA_1$ ,  $oA_2$ , le trièdre  $oA_1A_2I$  a la disposition directe, puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ y_1 & y_2 & z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ z_1 & z_2 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$$

est positif; enfin le nombre qui mesure  $OI$  est bien, comme il est aisé de le voir, le double du nombre qui mesure l'aire du triangle  $oA_1A_2$ . Les nombres  $y_1 z_2 - y_2 z_1$ ,  $z_1 x_2 - z_2 x_1$ ,  $x_1 y_2 - x_2 y_1$  mesureront les moments du segment  $A_1A_2$  par rapport aux droites  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ .

Considérons un corps solide (S) qui tourne autour d'une droite (D) et un demi-plan limité à la droite (D), invariablement lié au corps (S); soit  $\Delta x$  la valeur absolue de l'angle infiniment petit décrit par le demi-plan, à partir de l'époque  $t$  pendant l'intervalle de temps infiniment petit  $\Delta t$ ; la vitesse angulaire du corps solide à l'époque  $t$  est un segment dont la longueur est mesurée par le nombre positif qui est la

limite de  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ , dont la ligne d'action est la droite (D), dont le sens est tel, que l'observateur couché sur la droite (D), traversé des pieds à la tête par la direction du segment, voie la rotation s'effectuer dans le sens direct. Si sur la droite (D) on a choisi une direction positive, le segment qui représente la vitesse angulaire sera mesuré par un nombre positif ou négatif; on donne aussi à ce nombre le nom de *vitesse angulaire*.

Quand un corps solide tourne autour d'une droite (D), la vitesse d'un quelconque de ses points, à l'époque  $t$ , est le moment par rapport à ce point de la vitesse angulaire à l'époque  $t$ .

Cette remarque, les théorèmes précédents sur les moments et la proposition relative à la composition des vitesses dans le mouvement relatif permettent de constituer toute la théorie de la composition des rotations.

Un segment peut être variable; il peut être regardé comme une fonction d'une variable numérique, si, pour chaque valeur de cette variable, il est déterminé, au moins en grandeur et en direction. Si l'on désigne par  $t$  la variable numérique, on peut représenter par  $f(t)$  un segment qui dépend de cette variable; ce symbole désigne, bien entendu, non une fonction numérique, mais une fonction géométrique.

Si à chaque longueur donnée  $\delta$  correspond un nombre positif  $\epsilon$ , tel que la différence géométrique  $f(t_0 + h) - f(t_0)$  ait une longueur moindre que  $\delta$ , pourvu que le nombre  $h$  soit en valeur absolue moindre que  $\epsilon$ , la fonction géométrique  $f(t)$  sera dite continue pour  $t = t_0$ .

D'après les conventions adoptées au début, le symbole

$$\frac{1}{h} [f(t+h) - f(t)],$$

où  $h$  est un nombre et où le signe -- a le sens géométrique, désigne un certain segment; s'il existe un segment  $f'(t)$ , tel que, à chaque longueur donnée  $\delta$  corresponde un nombre positif  $\epsilon$ , tel que la longueur de la différence géométrique

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t)$$

soit moindre que  $\delta$ , pourvu que le nombre  $h$  soit, en valeur absolue, moindre que  $\varepsilon$ , on dit que le segment  $f(t)$  admet une dérivée géométrique. Cette dérivée géométrique est le segment  $f'(t)$ . De la notion de dérivée géométrique première on passe à la notion de dérivées géométriques seconde, troisième, etc....

Dans le cas où la ligne d'action du segment  $f(t)$  reste parallèle à une droite fixe, sur laquelle on a choisi une direction positive, on peut donner, d'après les conventions expliquées au début, une signification numérique au symbole  $f(t)$ ; la dérivée numérique de la fonction numérique  $f(t)$  représente alors, d'après les mêmes conventions, la dérivée géométrique du segment  $f(t)$ .

Si  $A, B, C, \dots$  désignent des segments géométriques, fonctions d'une variable  $t$ , admettant des dérivées géométriques  $A', B', C', \dots$ , et si  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  désignent des nombres constants, la somme géométrique

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \dots$$

des segments  $\alpha A, \beta B, \gamma C, \dots$  admettra pour dérivée géométrique la somme géométrique

$$\alpha A' + \beta B' + \gamma C' + \dots$$

des segments  $\alpha A', \beta B', \gamma C', \dots$ , dérivées géométriques des segments  $\alpha A, \beta B, \gamma C, \dots$ ; la démonstration est identique à la démonstration du théorème correspondant d'Analyse. On peut même supposer que les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , au lieu d'être des constantes, sont des fonctions numériques de la variable  $t$ ; en désignant alors par  $\alpha', \beta', \gamma'$  leurs dérivées numériques, la dérivée géométrique du segment  $\alpha A + \beta B + \gamma C + \dots$  serait le segment

$$\alpha' A + \beta' B + \gamma' C + \dots + \alpha A' + \beta B' + \gamma C' + \dots,$$

le signe  $+$  se rapportant toujours à l'addition géométrique.

Il résulte de ce théorème et de ce que, si l'on a pris trois axes coordonnés  $ox, oy, oz$ , tout segment peut être regardé comme la somme géométrique de ses trois projections sur ces axes, que si les projections sur ces trois axes d'un segment variable ont des dérivées (géométriques ou numériques), le segment a une dérivée égale à la somme géométrique des dérivées de ces projections; inversement ces dérivées sont les projections sur les axes de la dérivée géométrique du segment.

On voit de même que, si l'on projette le segment sur le plan des  $xy$



par exemple, au moyen de parallèles à l'axe des  $z$ , la dérivée géométrique de la projection est la projection de la dérivée géométrique du segment considéré.

La vitesse d'un point mobile est la dérivée géométrique, par rapport au temps, du segment qui va d'un point fixe quelconque au point mobile, l'accélération est la dérivée géométrique de la vitesse.

Supposons que le segment  $f(t)$  admette pour dérivée géométrique le segment  $f'(t)$  et que, lorsque  $t$  varie de  $a$  à  $b$ , la longueur de ce dernier segment reste inférieure ou égale à une longueur fixe  $L$ , la longueur du segment

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

sera au plus égale à  $L$  ; dans cette formule le signe — au numérateur a le sens géométrique ; le numérateur est un segment qui doit être multiplié, au sens expliqué plus haut, par le nombre  $\frac{1}{b-a}$ . Si l'on suppose que le segment  $f(t)$  ait une origine fixe et que l'on regarde la variable  $t$  comme représentant le temps, cela revient à dire que, pendant un intervalle fini, la vitesse moyenne d'un mobile ne peut pas être constamment supérieure à la vitesse de ce mobile ; sans insister davantage sur cette proposition, dont il serait bien facile de rendre la démonstration rigoureuse en supposant que la fonction géométrique  $f'(t)$  soit continue, je remarquerai qu'elle peut jouer, dans bien des cas, le même rôle que, dans l'Analyse, la formule des accroissements finis.

On trouvera, de même, une interprétation géométrique de la formule de Taylor et du terme complémentaire <sup>(1)</sup> ou de diverses formules analogues.

Je me contenterai de renvoyer le lecteur au Mémoire de M. Darboux *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable* (*Journal de Liouville*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 291). Sans doute les problèmes qu'a traités M. Darboux paraissent très différents de ceux que je signale, mais la méthode qu'il a suivie s'applique à ces derniers, avec des modifications insignifiantes.

---

<sup>(1)</sup> La signification cinématique de la série de Taylor a été signalée par Möbius, *Journal de Crelle*, t. 36.

## II.

Considérons un plan fixe ( $p$ ) et un plan mobile ( $P$ ), qui se meut sur le plan ( $p$ ) en coïncidant constamment avec lui ; supposons le plan ( $p$ ) rapporté à un système d'axes coordonnés rectangulaires  $ox, oy$ . Soient, à l'époque  $t$ ,  $x, y$  les coordonnées d'un point quelconque  $M$  invariablement lié au plan  $P$  ;  $u, v$  les coordonnées du centre instantané de rotation  $I$  ; soit enfin  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation du plan ( $P$ ). En désignant par  $AB$  une direction quelconque invariablement liée au plan ( $P$ ) et par  $\alpha$  l'angle ( $ox, AB$ ), on a

$$\omega = \frac{dx}{dt} ;$$

$\omega$  est un nombre positif ou négatif. Cette définition coïncide avec la définition donnée antérieurement de la vitesse angulaire comme un segment porté sur la direction perpendiculaire au plan ( $P$ ) qui correspond à l'orientation de ce plan.

Ceci posé, les projections  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$  sur les axes  $ox, oy$  de la vitesse du point  $M$  sont données par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega(y-v) = \omega r \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{dy}{dt} = \omega(x-u) = \omega r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

en désignant par  $r = +\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$  le nombre positif qui mesure la distance  $IM$  et par  $\varphi$  l'angle ( $ox, IM$ ), défini par les égalités

$$(2) \quad x-u = r \cos \varphi, \quad y-v = r \sin \varphi.$$

On déduit des équations (1), en prenant les dérivées par rapport à  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega'(y-v) + \omega v' - \omega \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \omega'(x-u) - \omega u' + \omega \frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

où  $\omega', u', v'$  sont les dérivées de  $\omega, u, v$  ; en posant

$$(3) \quad u' = V \cos \theta, \quad v' = V \sin \theta,$$



Déterminer l'accélération du point M, c'est trouver la dérivée géométrique de sa vitesse.

Soient

$m, m'$  deux positions, dans le plan  $(p)$ , aux époques  $t$  et  $t + \Delta t$ , du point M du plan  $(P)$ ;

$v_m, v_{m'}$  les vitesses de ce point ;

$\omega$  et  $\omega + \Delta\omega$  les vitesses angulaires du plan  $(P)$ ;

I et I' les centres instantanés de rotation aux mêmes époques.

Il s'agit d'avoir la limite, pour  $\Delta t = 0$ , du segment

$$\frac{v_{m'} - v_m}{\Delta t};$$

soit  $v'_m$  la vitesse qu'aurait, au temps  $t$ , le point du plan  $(P)$  qui, à ce moment, coïncide avec le point  $m'$  du plan  $(p)$  : on a, en donnant aux signes le sens géométrique, comme dans la formule précédente et dans le reste de la démonstration,

$$\frac{v_{m'} - v_m}{\Delta t} = \frac{v_{m'} - v'_m}{\Delta t} + \frac{v'_m - v_m}{\Delta t}.$$

Considérons la deuxième partie : on obtient les segments  $v_m$  et  $v'_m$  en faisant tourner de l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  les segments  $\omega Im, \omega Im'$  ; leur différence géométrique  $v'_m - v_m$  s'obtiendra donc en faisant tourner du même angle le segment

$$\omega(Im' - Im) = \omega.mm'.$$

D'ailleurs le segment  $\frac{mm'}{\Delta t}$  n'est autre que la vitesse moyenne, pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , du point M ; la limite de ce segment s'obtient en faisant tourner de l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  le segment  $\omega Im$ , par conséquent la limite du segment  $\frac{v'_m - v_m}{\Delta t}$  s'obtiendra en faisant tourner de l'angle  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$  le segment  $\omega^2 Im$  : cette limite n'est autre que le segment  $\omega^2 mI$ . Considérons maintenant la première partie

$$\frac{v_{m'} - v'_m}{\Delta t};$$

on obtient  $v_{m'}$  en faisant tourner de l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  le segment  $(\omega + \Delta\omega)I'm'$ , en sorte que le numérateur de l'expression dont on cherche la limite s'obtient en faisant tourner de l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  le segment

$$(\omega + \Delta\omega)I'm' - \omega Im' = \omega(I'm' - Im') + \Delta\omega I'm' = \omega I'I + \Delta\omega I'm';$$

on aura donc à faire tourner de l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  la limite du segment

$$\frac{\omega I'I}{\Delta t} + \frac{\Delta\omega}{\Delta t} I'm'.$$

Or  $\frac{II'}{\Delta t}$  est la vitesse moyenne du centre instantané de rotation pendant l'intervalle  $\Delta t$ ; la limite de ce segment n'est autre chose que la vitesse  $IR$  du centre instantané; la ligne d'action de ce dernier segment est la tangente commune en  $I$  aux deux courbes  $(C)$  et  $(C')$ , la limite du segment  $\omega \frac{I'I}{\Delta t} = -\omega \frac{II'}{\Delta t}$  sera

$$-\omega IR = \omega RI.$$

On aura à faire tourner ce dernier segment de l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  ou, si l'on veut, le segment  $\omega RI$  de l'angle  $-\frac{\pi}{2}$ ; enfin le segment  $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} I'm'$  aura manifestement pour limite le segment  $\omega'Im$ ; on aura à le faire tourner de l'angle  $+\frac{\pi}{2}$ ; on a ainsi retrouvé les trois parties dont l'accélération du point  $M$  est la somme géométrique.

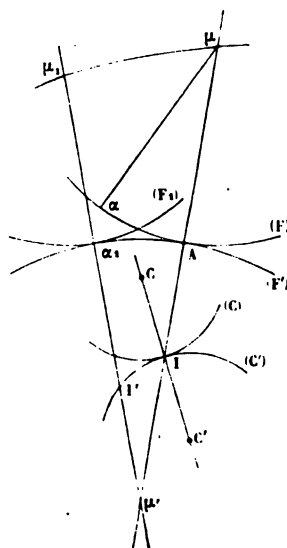
On observera que la dernière partie n'intervient pas dans l'expression de l'accélération normale du point  $M$ . Quant aux deux premières parties, il est naturel de les composer de la façon suivante: soit (*fig. 1*), sur la normale commune aux deux courbes  $(C)$ ,  $(C')$  un segment  $IG$  qui, en prenant  $IK$  pour direction positive, soit mesuré par le nombre  $\frac{V}{\omega}$ ; le point  $G$  est dit souvent *pôle des inflexions*. Les deux premières parties dont se compose l'accélération du point  $M$  sont les segments  $\omega^2 MI$ ,  $\omega^2 IG$  dont la somme géométrique est  $\omega^2 MG$ , en sorte que, si l'on désigne par  $\gamma$  la projection orthogonale du point  $G$  sur  $OM$ , l'accéléra-

tion normale du point  $M$  sera le segment  $\omega^2 M\gamma$ ; de la construction de l'accélération normale, il sera bien facile de déduire la construction du centre de courbure de la trajectoire du point  $M$ ; mais, avant de m'occuper de ce sujet, j'ai besoin de faire une courte digression.

Supposons que, à l'époque  $t$ , on fasse correspondre à chaque point  $M$  du plan  $(P)$  le centre de courbure  $M'$  de la trajectoire de ce point. Si l'on considère deux points infiniment voisins  $M, M_1$ , les points correspondants  $M', M'_1$  seront infiniment voisins, puisque, en vertu de ce qui précède, la différence géométrique entre les accélérations normales des points  $M, M_1$  est infiniment petite.

Il résulte de là que, si l'on considère une courbe  $(F)$ , invariable-

Fig. 2.



ment liée au plan  $(P)$ , et la courbe  $(F')$  enveloppe des positions que la courbe  $(F)$  vient occuper dans le plan  $(p)$ , en sorte que, d'après une proposition bien connue, la courbe  $(F)$  touche à l'époque  $t$ , la courbe  $(F')$  au pied  $A$  de la normale  $IA$  abaissée du centre instantané de rotation  $I$  sur la courbe  $(F)$ , le centre de courbure  $M'$  de la courbe  $(F')$ , relatif au point  $A$ , correspondra au sens que je viens de dire, au centre de courbure  $M$  de la courbe  $(F)$  relatif au même point  $A$ . Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter un coup d'œil sur la *fig. 2*.

(F) et (F<sub>1</sub>) sont deux positions de la courbe (F) aux époques  $t$  et  $t + \Delta t$ ; I et I' les centres instantanés de rotation aux mêmes époques; IA, I'α, sont les normales abaissées respectivement des points I, I' sur les courbes (F), (F<sub>1</sub>), qui touchent leur enveloppe (F') en A et α; α est le point de (F) qui, à l'époque  $t + \Delta t$ , vient en α; la normale à (F) en α coupe la normale IA en A au point μ, infiniment voisin du centre de courbure M de la courbe (F) relatif au point A, la normale I'α, en α, à la courbe (F<sub>1</sub>) coupe la droite IA en un point μ' infiniment voisin du centre de courbure M' de l'enveloppe (F'), puisque les deux droites IA, I'α, sont deux normales infiniment voisines à cette enveloppe; d'ailleurs à l'époque  $t + \Delta t$  le segment αμ vient occuper la position α, μ, sur la normale en α, à la courbe (F<sub>1</sub>), en sorte que la droite μ, α, I' est la normale en μ, à la trajectoire μμ, du point μ; par suite, le point μ' intersection de deux normales infiniment voisines à cette trajectoire est aussi infiniment voisin du centre de courbure de la trajectoire du point M; par suite enfin, le point M' correspond bien au point M.

En particulier, le point C centre de courbure de la courbe (C), relatif au point I où cette courbe touche son enveloppe (C'), a pour correspondant le point C' centre de courbure de la courbe (C') relatif au même point I.

Ceci posé, conservons dans la *fig.* 3 les mêmes notations que dans la *fig.* 1, en sorte que, M étant un point quelconque du plan (P), I le centre de courbure à l'époque  $t$ , G le pôle des inflexions, γ le pied de la perpendiculaire abaissée du point G sur IM,  $\omega^2 M\gamma$  l'accélération normale du point M; soit M' le centre de courbure de la trajectoire du point M; supposons enfin que sur la droite IM on ait pris une direction positive quelconque. On aura, en écrivant que le produit de l'accélération normale par le rayon de courbure est égal au carré de la vitesse du point M,

$$\omega^2 M\gamma \times MM' = \omega^2 MI^2;$$

dans cette égalité MM', Mγ, MI représentent, avec leurs signes, les *nombres* qui mesurent les segments de mêmes noms; cette égalité équivaut à la construction suivante du point M'. Soit S le point où la droite MG rencontre la perpendiculaire IN à IM; par le point S menez

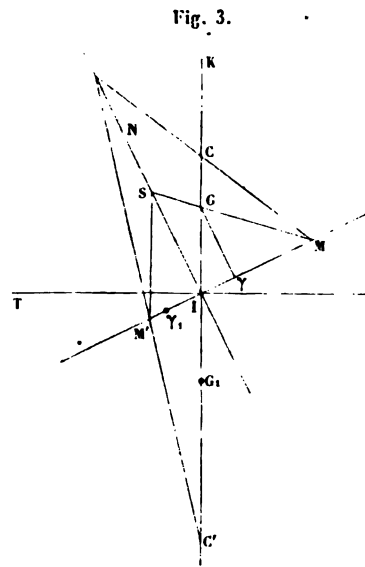
une parallèle à IG, le point où elle rencontrera la droite IM sera le point M'; la figure montre en effet que l'on a

$$\frac{M\gamma}{MI} = \frac{MG}{MS} = \frac{MI}{MM'};$$

d'où

$$(4) \quad M\gamma \times MM' = MI^2.$$

Cette même égalité montre comment le point M' varie quand le point M



se déplace sur la droite I $\gamma$ ; je ne m'y arrêterai que pour remarquer que le point M' est à l'infini lorsque le point M est en  $\gamma$ ; le point  $\gamma$  est donc, en général, un point d'inflexion de sa trajectoire; d'où le nom de cercle des inflexions donné au cercle, lieu du point  $\gamma$ , décrit sur IG comme diamètre.

Si l'on prend le point I pour origine des segments, l'équation (4) prendra la forme

$$(I\gamma - IM)(IM' - IM) = IM^2,$$

ou

$$(5) \quad \frac{1}{IM} - \frac{1}{IM'} = \frac{1}{I\gamma},$$



qui met en évidence le caractère homographique de la correspondance entre les points  $M'$  et  $M$  sur la droite  $IM$ ; les deux points doubles sont confondus avec le point  $I$ ; au point  $\gamma$  correspond le point à l'infini, au point à l'infini correspond le point  $\gamma_1$ , symétrique du point  $\gamma$  par rapport au point  $I$ . Si l'on considère une droite quelconque perpendiculaire à  $IM$  comme faisant partie du plan  $(P)$ , elle touchera son enveloppe au point où elle rencontre la droite  $I\gamma$ : comme son centre de courbure est à l'infini sur cette droite, le centre de courbure de l'enveloppe de cette droite sera le point  $\gamma_1$ , correspondant à l'infini; en particulier, si la droite passe par le point  $\gamma_1$ , ce point sera en général un point de rebroussement de l'enveloppe de la droite, d'où le nom de *cercle des rebroussements* donné au cercle, lieu du point  $\gamma_1$ , symétrique du cercle des inflexions par rapport au point  $I$  et le nom de *pôle des rebroussements* donné au point  $G$ , symétrique du point  $G$  par rapport au point  $I$ .

Une équation analogue à l'équation (5) relie deux points correspondants quelconques, nécessairement situés sur une droite passant par le point  $I$ ; on peut, en particulier, appliquer l'équation (5) sur la normale commune  $IK$  aux deux courbes  $(C)$  et  $(C')$ ; le point  $G$  remplace alors le point  $\gamma$ , c'est le point auquel correspond le point à l'infini sur la droite. A ce point à l'infini correspond le point  $G_1$ ; puis donc que le point  $C'$ , centre de courbure de  $(C')$ , correspond au point  $C$ , centre de courbure de  $(C)$ , on a

$$(6) \quad \frac{1}{IC} - \frac{1}{IC'} = \frac{1}{IG} = \frac{\omega}{V};$$

enfin, si l'on désigne par  $\varphi$  l'angle de la direction positive choisie sur  $IM$  et de la direction positive sur la normale commune; on aura, à cause de la relation

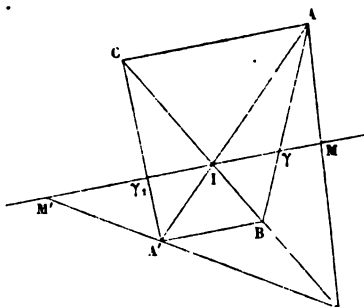
$$(7) \quad \frac{1}{IC} - \frac{1}{IC'} = \cos \varphi \left( \frac{1}{IM} - \frac{1}{IM'} \right);$$

Ce sont les relations (6) et (7) que j'avais principalement en vue; d'après la façon dont elles ont été établies, elles ne prêtent à aucune équivoque.

A la formule (7) équivaut la construction géométrique connue sous le nom de *Savary*, que je vais développer.

Soient  $A, A'$  deux points correspondants quelconques (*fig. 4*), que je regarderai comme fixes; si les points correspondants  $M, M'$  se déplacent sur la droite  $I\gamma$ , les deux rayons  $AM, A'M'$  engendreront deux faisceaux homographiques. Puisque deux rayons homologues, à savoir  $AI$  et  $A'I$ , sont situés sur une même droite, on voit que le lieu des points d'intersection des deux rayons homologues  $AM, A'M'$  est une

Fig. 4.



droite; en particulier, le rayon homologue du rayon  $A\gamma B$  sera le rayon  $A'B$  parallèle à  $I\gamma$ , et le rayon homologue du rayon  $AC$  parallèle à  $I\gamma$  sera le rayon  $A'\gamma, C$ ; la droite, lieu des intersections de deux rayons homologues, sera la droite  $BC$ , qui, en vertu d'un théorème de Géométrie élémentaire, passe par le milieu  $I$  du segment  $\gamma\gamma'$ .

Enfin il convient de remarquer qu'on retrouverait la même droite  $BC$  si l'on avait remplacé les deux points  $A, A'$  par deux autres points correspondants  $A_1, A'_1$  situés sur la même droite  $AIA'$ ; il suffit, pour s'en convaincre, de regarder les points  $M$  et  $M'$  comme fixes, les points  $A, A'$  comme variables sur la droite  $AIA'$ , les rayons homologues  $MA, M'A'$  devront se couper sur une droite passant par le point  $I$ , etc. Une fois qu'on a construit la droite  $BC$ , il est aisé d'obtenir le point  $M'_1$  correspondant à un autre point  $M_1$  de la droite  $IM$ ; ce point  $M'_1$  est le point où la droite  $IM$  est rencontrée par la droite qui joint le point  $A'$  au point où la droite  $AM_1$  rencontre la droite  $BC$ .

La première construction qu'on a indiquée pour déduire le point  $M'$  du point  $M$  (*fig. 3*) rentre dans celle que je viens d'indiquer; elle con-

siste au fond à employer, au lieu des points A et A', le point G et le point à l'infini sur la droite IG; elle met en évidence ce fait que la droite qui remplace alors la droite BC est la perpendiculaire menée par le point I à IM. Cette remarque faite, on peut remplacer le point G et le point à l'infini par deux points correspondants quelconques sur la normale commune aux deux courbes (C) et (C'), par exemple par les points C, C' et appliquer la règle suivante : le point M' est le point où la droite IM est rencontrée par la droite qui joint le point C' au point où la droite CM rencontre la perpendiculaire en I à la droite IM.

D'après cela, lorsqu'on se donne deux couples de points correspondants M, M' et A, A', on peut construire la normale commune aux deux courbes (C) et (C'), sur cette normale deux points correspondants C<sub>1</sub>, C'<sub>1</sub> et, par conséquent, ensuite le point qui correspond à un point donné quelconque.

Soit, en effet, C<sub>1</sub> le point cherché où la droite AM rencontre la normale commune; soient a et m les points où la droite AM rencontre les perpendiculaires élevées en I aux droites IA, IM, les droites A'a, M'm se couperont aux points C'<sub>1</sub>; cette construction a été indiquée par M. Gilbert.

Enfin il convient d'examiner le cas où le point M se trouve sur la tangente commune en I aux deux courbes (C) et (C'). On voit, en se reportant à l'expression ou à la construction de l'accélération normale, que le centre de courbure de la trajectoire est en I; on peut dire, si l'on veut, que la construction de Savary s'applique encore.

La transformation qui fait correspondre le point M' au point M n'est pas homographique; elle appartient à cette classe de transformations auxquelles le nom de M. Cremona est attaché. Si l'on prend pour axe des x la direction à IT (*fig. 1*) et pour axe des y la direction telle que l'angle (x, y) soit égal à  $+\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire la direction opposée à IK, on aura, entre les coordonnées x, y, x', y' de deux points correspondants, les relations

$$\begin{aligned} x' &= \frac{axy}{x^2 + y^2 + ay}, & y' &= \frac{ay^2}{x^2 + y^2 + ay}, \\ x &= \frac{-ax'y'}{x'^2 + y'^2 - ay'}, & y &= \frac{-ay'^2}{x'^2 + y'^2 - ay'}, \end{aligned}$$

en posant

$$\frac{V}{\omega} = a.$$

Les projections de l'accélération totale des points  $x, y$  sur ces axes sont respectivement  $-\omega^2 x - \omega' y, -\omega^2 y + \omega' x - \omega V$ ; celles de l'accélération normale sont  $-\omega^2 x, -\omega^2 \left(y + \frac{V}{\omega}\right)$ ; ces axes conviennent dans les diverses questions où l'on se propose de déterminer, à l'époque  $t$ , les points du plan qui jouissent d'une propriété donnée relativement à l'accélération ou à la courbure de leur trajectoire.

J'ajouterai enfin que les formules qui donnent l'accélération d'un point quelconque du plan (P) ou le théorème qui donne les trois composantes de cette accélération montrent que la différence géométrique entre les accélérations de deux points  $M, M_1$  est égale à l'accélération qu'aurait le point  $M$  si le plan (P) tournait autour du point  $M_1$  avec la vitesse angulaire  $\omega$ . On obtient un résultat particulièrement simple si l'on prend pour le point  $M_1$  le point qui a une accélération nulle; ce point, situé sur le cercle des inflexions, a pour coordonnées dans le dernier système d'axes

$$x = \frac{V \omega \omega'}{\omega^4 + \omega'^2}, \quad y = \frac{-V \omega^3}{\omega^4 + \omega'^2}.$$

Considérons maintenant un corps solide qui se meut autour d'un point fixe O. Soient  $Ox, Oy, Oz$  trois axes coordonnés fixes rectangulaires dont l'origine coïncide avec le point O; soit à l'époque  $t$  une direction OJ prise sur l'axe instantané de rotation, direction définie par les trois coordonnées  $a, b, c$  du point J, liées entre elles par la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

en sorte que OJ soit égal à l'unité de longueur. La vitesse angulaire est un segment dont la ligne d'action est la même que celle du segment OJ. Soit  $\omega$  le nombre qui mesure ce segment quand on prend la direction OJ pour la direction positive; soit, enfin, M un point invariablement lié au corps solide, dont les coordonnées à l'époque  $t$  soient  $x, y, z$ . On aura, pour les projections  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  de la vitesse du point M sur les

axes  $Ox, Oy, Oz$

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = \omega(bz - cy), \quad \frac{dy}{dt} = \omega(cx - az), \quad \frac{dz}{dt} = \omega(ay - bx);$$

en prenant les dérivées par rapport à  $t$ , remplaçant ensuite dans les seconds membres  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  par les valeurs (1), désignant enfin par  $\omega', a', b', c'$  les dérivées de  $\omega, a, b, c$ , on obtient, pour les projections sur les axes  $Ox, Oy, Oz$  de l'accélération du point M,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2[a(ax + by + cz) - x] + \omega(b'z - c'y) + \omega'(bz - cy), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2[b(ax + by + cz) - y] + \omega(c'x - a'z) + \omega'(cx - az), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \omega^2[c(ax + by + cz) - z] + \omega(a'y - b'x) + \omega'(ay - bx). \end{cases}$$

Ces formules s'interprètent immédiatement (*fig. 6*);  $ax + by + cz$  est le segment  $OI$ , projection orthogonale sur  $OJ$  du segment  $OM$ ; par conséquent  $a(ax + by + cz)$  est la projection sur  $Ox$  du segment  $OI$ , et  $a(ax + by + cz) - x$  est la projection sur  $Ox$  de la différence géométrique

$$OI - OM = MI;$$

$b'z - c'y$  est la projection sur le même axe du moment par rapport au point M du segment qui va du point O au point dont les coordonnées sont  $a', b', c'$ ; enfin  $\omega'(bz - cy)$  est la projection sur le même axe du moment par rapport au point M d'un segment égal à  $\omega'$  porté sur la direction  $OJ$ .

En résumé, l'accélération du point M est la somme géométrique de trois segments :

1° Le segment  $\omega^2 MI$ ;

2° Le segment  $\omega^2(OAM)$ ,  $OA$  étant un segment égal à

$$\frac{V}{\omega} = \frac{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}{\omega}$$

porté sur la direction définie par les trois quantités  $a', b', c'$ , direction



D'ailleurs il est clair que  $\frac{(\mathbf{MM}_1\mathbf{J}')}{\Delta t}$  est équipollent au moment par rapport à  $\mathbf{J}'$  du segment  $\frac{\mathbf{MM}_1}{\Delta t}$ , segment qui représente la vitesse moyenne du point  $\mathbf{M}$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , et dont la limite est le segment  $\omega \mathbf{MN}$ , en supposant  $\mathbf{MN} = (\mathbf{OJM})$ ; la limite cherchée est donc  $-\omega^2(\mathbf{MNJ}') = \omega^2(\mathbf{MJ'N})$ . Puisque  $\mathbf{OJ}$  est égal à un, on obtient le segment  $(\mathbf{OJM})$  en faisant tourner le segment  $\mathbf{IM}$  d'un angle droit, dans le sens direct, autour de la direction  $\mathbf{OJ}$  ou, ce qui revient au même, en faisant tourner le segment  $\mathbf{MI}$  d'un angle droit, dans le sens indirect, autour de la direction  $\mathbf{MJ'}$ ; le point  $\mathbf{I}$ , après ce dernier mouvement, vient donc en  $\mathbf{N}$ ; mais, puisque  $\mathbf{MJ'}$  est égal à un, on obtient le moment  $(\mathbf{MJ'N})$  en faisant tourner le segment  $\mathbf{MN}$  perpendiculaire à  $\mathbf{MJ'}$ , d'un angle droit, dans le sens direct autour de la direction  $\mathbf{MJ'}$ , ce qui ramène le point  $\mathbf{N}$  en  $\mathbf{I}$ ; finalement la limite cherchée est le segment  $\omega^2 \mathbf{MI}$ .

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{v_{m_1} - v'_{m_1}}{\Delta t},$$

elle est égale à

$$\frac{(\omega + \Delta\omega)(\mathbf{OJ}_1\mathbf{M}_1) - \omega(\mathbf{OJM}_1)}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t}[(\mathbf{OJ}_1\mathbf{M}_1) - (\mathbf{OJM}_1)] + \frac{\Delta\omega}{\Delta t}(\mathbf{OJ}_1\mathbf{M}_1).$$

Si  $\mathbf{Oa}$  est un segment équipollent à  $\mathbf{JJ}_1$ , on aura

$$(\mathbf{OJ}_1\mathbf{M}_1) - (\mathbf{OJM}_1) = (\mathbf{OaM}_1);$$

d'ailleurs la limite du segment  $\frac{\mathbf{Oa}}{\Delta t}$  n'est autre que le segment  $\omega \mathbf{OA}$ , en conservant à  $\mathbf{OA}$  la même signification que dans la démonstration analytique; puis donc enfin que la limite du point  $\mathbf{M}_1$  est le point  $\mathbf{M}$ , on voit que le segment

$$\frac{\omega}{\Delta t}[(\mathbf{OJ}_1\mathbf{M}_1) - (\mathbf{OJM}_1)]$$

a pour limite le segment  $\omega^2(\mathbf{OAM})$ ; enfin le segment  $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}(\mathbf{OJ}_1\mathbf{M}_1)$  a manifestement pour limite  $\omega'(\mathbf{OJM})$ .

On retrouve donc bien les trois parties de l'accélération.





en supposant  $OR$  équipollent à  $(OA'M)$  ; le segment  $OR$  est situé dans le plan  $MOI$  normal à la trajectoire du point  $M$  et est perpendiculaire à  $OM$ . Soit  $IR_1$  un segment équipollent à  $OR$  : l'accélération normale du point  $M$  sera

$$\omega^2 MI + \omega^2 IR_1 = \omega^2 MR_1;$$

en écrivant que le produit du nombre qui mesure l'accélération normale par le nombre qui mesure le rayon de courbure est égal au carré du nombre qui mesure la vitesse, on aura, après avoir supprimé le facteur  $\omega^2$ ,

$$M\mu \times MR_1 = MI^2.$$

Dans cette égalité  $\mu$  désigne le centre de courbure de la trajectoire du point  $M$  ;  $M\mu$ ,  $MR_1$  sont les nombres qui mesurent les segments de même nom, portés sur une même droite  $M\mu R_1$ , sur laquelle d'ailleurs la direction positive est arbitraire ;  $MI$  est aussi le nombre qui mesure la longueur du segment de même nom. Il résulte de cette égalité que la droite  $O\mu$  est perpendiculaire sur  $MR_1$  ; si l'on désigne en effet par  $F$ ,  $H$  les points où la droite  $IR_1$  rencontre les droites  $OM$ ,  $O\mu$ , on aura, puisque  $IF$  est la hauteur du triangle rectangle  $MIO$ ,

$$MI^2 = MF \times MO$$

et, par conséquent,

$$M\mu \times MR_1 = MF \times MO.$$

Les quatre points  $O$ ,  $F$ ,  $\mu$ ,  $R_1$  sont donc sur un cercle et, puisque l'angle  $OFR_1$  est droit, il en est de même de l'angle  $O\mu R_1$  ;  $O\mu$  est donc perpendiculaire au plan osculateur, qui n'est autre que le plan qui passe par les lignes d'action de l'accélération normale et de la vitesse, c'est-à-dire le plan mené suivant la droite  $MR_1$  perpendiculairement au plan  $MOJ$  ;  $O\mu$  est donc l'axe du cercle osculateur de la trajectoire du point  $M$ . C'est aussi l'axe du cercle osculateur de la trajectoire d'un point quelconque invariablement lié au corps solide et situé, au temps  $t$ , sur la droite  $OM$  : cela résulte de la construction précédente ; il est d'ailleurs évident *a priori* qu'il en doit être ainsi.

Au lieu de construire ainsi le point  $\mu$ , on peut procéder de la manière suivante : substituons au segment  $OA$  le système équivalent de segments obtenus en lui adjoignant les deux segments égaux et opposés

$I\alpha, I\alpha'$ , dont le premier est équipollent à  $OA$ , en sorte que les deux segments  $OA, I\alpha'$  forment un couple. Soit  $IG$  l'axe de ce couple; le moment ( $OAM$ ) sera égal à la somme géométrique du segment  $IG$  et du moment ( $I\alpha M$ ); ce dernier segment est perpendiculaire au plan ( $P$ ) mené par le point  $M$  perpendiculairement à l'axe instantané, en sorte que la projection de l'accélération normale sur le plan ( $P$ ) s'obtiendra en projetant orthogonalement sur le plan normal  $MOI$  la somme géométrique des deux segments  $\omega^2 MI$  et  $\omega^2 IG$  ou le segment  $\omega^2 MG$ ; si donc on abaisse du point  $G$  la droite  $G\gamma$  perpendiculaire sur  $MI$ , la projection sur le plan ( $P$ ) de l'accélération normale sera  $\omega^2 M\gamma$ ; par conséquent la droite  $R_1\gamma$  est perpendiculaire sur la droite  $MI\gamma$ ; si maintenant on désigne par  $M'$  le point où la droite  $O\mu$  rencontre la droite  $MI$ , il est clair que les quatre points  $M', \mu, R_1, \gamma$  sont sur un cercle et que, par conséquent, l'on a

$$MM' \times M\gamma = M\mu \times MR_1 = MI^2,$$

en sorte que, dans le plan ( $P$ ), le point  $M'$  correspond au point  $M$ , absolument d'après la même loi qui permet de déduire, dans le mouvement d'un plan sur un plan, de chaque point du plan mobile le centre de courbure de sa trajectoire; dans la *fig. 6*, les points  $M, M', I, G, \gamma$  jouent le même rôle que les points de mêmes noms dans la *fig. 3*.

Dès qu'on a le point  $M'$ , on a l'axe du point osculateur de la trajectoire du point  $M$  et le centre de courbure de cette trajectoire.

Imaginons maintenant une sphère ( $S$ ) de centre  $O$ , de rayon égal à un, invariablement liée au corps solide; elle coïncidera constamment avec une sphère fixe ( $s$ ). A l'époque  $t$ , le point  $J$  est, si l'on veut, le *centre instantané de rotation* sur la sphère ( $S$ ), dont le mouvement, s'il était connu, ferait connaître entièrement le mouvement du corps solide. Les lieux des centres instantanés de rotation sur les sphères ( $S$ ), ( $s$ ) sont des courbes ( $C$ ), ( $C'$ ) qui, à l'époque  $t$ , sont tangentes en  $J$  et qui roulent l'une sur l'autre. A chaque point  $m$  de la sphère ( $S$ ), faisons correspondre le centre de courbure sphérique  $m'$  de sa trajectoire sphérique; les points  $m, m'$  seront, en vertu de ce qu'on vient de démontrer, les perspectives sur la sphère ( $S$ ) de deux points correspondants sur le plan ( $P$ ), l'œil étant supposé en  $O$ ; les perspectives sur la même sphère des lignes d'action des segments  $I\alpha, IG$  sont les grands cercles respec-

tivement tangents et normaux en I aux courbes (C) et (C'). Si l'on désigne par  $c$  et  $c'$  les centres de courbure sphériques de ces deux courbes relatifs au point J, les deux points  $c$  et  $c'$  seront, sur la sphère (S), deux points correspondants, comme on le voit par un raisonnement identique à celui qui a été donné dans l'étude du mouvement d'un plan sur un plan. Les deux points C, C', perspectives sur le plan (P) des points  $c$ ,  $c'$ , sont donc des points correspondants sur le plan (P); on pourra donc effectuer, sur le plan (P), les constructions de Savary si l'on connaît les deux points C et C' ou, si l'on veut, les constructions correspondantes sur la sphère (S) si l'on connaît les points  $c$ ,  $c'$ . Le point  $m'$ , correspondant au point  $m$ , sera le point d'intersection du grand cercle Jm avec le grand cercle qui joint le point  $c'$  au point où le grand cercle, mené par le point J perpendiculairement au grand cercle Jm, rencontre le grand cercle cm. On voit de même comment, connaissant deux couples de points correspondants sur la sphère, on pourra construire le point correspondant à un point quelconque.

Enfin, la propriété des deux figures sur le plan (P) et la sphère (S), d'être en perspective, fournit immédiatement les relations entre la vitesse angulaire  $\omega$ , la vitesse V avec laquelle se déplace le centre instantané J, les rayons de courbure sphérique Jc, Jc' des deux courbes et les arcs de grands cercles Jm, Jm' qui vont du point J à deux points correspondants.

Supposons, pour simplifier un peu, que le point I coïncide avec le point J, en sorte que le plan (P) soit le plan tangent en J à la sphère (S). On voit sans peine que, si l'orientation de ce plan correspond à la direction OI, l'angle des deux directions (I $\alpha$ , IG) est égal à  $-\frac{\pi}{2}$ . Ceci posé, la ligne d'action du segment I $\alpha$  est la tangente commune aux deux courbes (C) et (C'). Supposons qu'on ait choisi sur cette droite une direction quelconque IT, la vitesse de déplacement du centre instantané de rotation sera représentée alors par un nombre positif ou négatif  $v = \pm V$ . Si, sur la perpendiculaire à cette droite dans le plan (P), on choisit comme direction positive la direction IK telle que l'angle (IK, IT) soit égal à  $+\frac{\pi}{2}$ , on aura

$$IG = \frac{v}{\omega};$$

puis, si l'on choisit sur l'arc de grand cercle tangent à  $IK$ , c'est-à-dire sur l'arc de grand cercle normal aux deux courbes  $(C)$ ,  $(C')$ , la direction positive qui correspond à la direction  $IK$ , la formule (6) de la page 69 montre que l'on a

$$(9) \quad \frac{1}{\tan Ic} - \frac{1}{\tan Ic'} = \frac{1}{IG} = \frac{v}{\omega}.$$

Si, enfin, on prend sur le grand cercle  $Im$  une direction positive quelconque et que l'on désigne par  $\varphi$  l'angle que la tangente à cette direction menée par le point  $I$  fait avec la direction  $IK$ , on aura

$$(10) \quad \frac{1}{\tan Ic} - \frac{1}{\tan Ic'} = \cos \varphi \left( \frac{1}{\tan Im} - \frac{1}{\tan Im'} \right).$$

Les arcs  $Ic$ ,  $Ic'$ ,  $Im$ ,  $Im'$  sont déterminés à un multiple de  $\pi$  près.

J'ajouterai enfin que, si l'axe  $Oz$  coïncide avec la direction  $OJ$ , si l'axe  $Ox$  est parallèle à la direction  $IT$  et de même sens, si enfin l'axe  $Oy$  est déterminé par cette condition que le trièdre  $Oxyz$  soit trirectangle et ait la disposition directe, en sorte que  $Oy$  soit parallèle à la direction  $IK$  et de sens contraire, les projections sur ces trois axes de l'accélération totale et de l'accélération normale du point, dont les coordonnées sont  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , seront respectivement, en faisant  $\lambda = \frac{v}{\omega}$ ,

$$\begin{aligned} & -\omega'y - \omega^2x, \quad \omega'x - \omega^2(\lambda z + y), \quad \omega^2\lambda y; \\ & -\frac{\omega^2x}{x^2+y^2}(x^2+y^2+\lambda zy), \quad -\frac{\omega^2y}{x^2+y^2}(x^2+y^2+\lambda zy), \quad \omega^2\lambda y. \end{aligned}$$

On trouvera aussi facilement l'équation du plan osculateur et les coordonnées du centre de courbure de la trajectoire du même point.



---

EXTRAIT

D'UNE

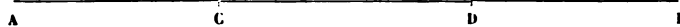
LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE,

PAR M. MARKOFF,  
PRIVAT-DOCENT A L'UNIVERSITÉ DE SAINT-PÉTERSBOURG.

---

Permettez-moi de vous communiquer les résultats de mes recherches sur un certain genre de questions de maxima et minima, provoquées par le Mémoire de M. Tchebycheff *Sur les valeurs limites des intégrales*, inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, en 1874. La question posée par l'illustre géomètre, dans le Mémoire mentionné, peut être énoncée comme il suit :

*Une masse donnée  $\alpha_0$  est distribuée d'une manière inconnue sur une droite AB de longueur l.*



*Convenons de déterminer la position de chaque point Y de cette droite par sa distance du point A*

$$AY = y$$

*et désignons par  $m$  la masse du point Y ou par  $f(y)$  la densité au point Y, de sorte que*

$$\alpha_0 = \sum m \quad \text{ou} \quad \int_0^l f(y) dy.$$

*On demande de trouver une telle distribution de la masse  $\alpha_0$  pour laquelle les sommes*

$$\sum m, \quad \sum m y, \quad \sum m y^2, \quad \dots, \quad \sum m y^n,$$

ou, ce qui est la même chose, les intégrales

$$\int_0^1 f(y) dy, \quad \int_0^1 f(y)y dy, \quad \int_0^1 f(y)y^2 dy, \quad \dots, \quad \int_0^1 f(y)y^n dy$$

aient des valeurs données a priori, respectivement égales à

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n,$$

et, en même temps, la masse d'un segment donné CD ( $AC = u$ ,  $AD = v$ ), c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_u^v f(y) dy,$$

soit un maximum ou un minimum.

M. Tchebycheff a donné, mais sans aucune explication, la solution de cette question dans le cas où  $n$  est égal à un nombre impair  $2k - 1$ , et les nombres  $u$  et  $v$  sont deux racines quelconques du dénominateur de la  $k^{\text{ième}}$  fraction convergente  $\frac{\psi_k(z)}{\varphi_k(z)}$  dans le développement de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(y) dy}{z - y}$$

en fraction continue.

Il a aussi indiqué le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_0^v f(y) dy$$

dans le cas de trois données

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2.$$

Ayant fixé mon attention sur ce genre de questions, je me suis proposé d'abord de démontrer les inégalités de M. Tchebycheff, qui donnent la solution de la question posée dans le premier cas particulier mentionné ci-dessus, et je suis parvenu au but en 1883.

Ma démonstration, fondée sur la considération des paraboles d'ordres supérieurs, tangentes aux courbes données dans un nombre donné de points, se trouve insérée, en français, dans les *Mathematische Annalen* de M. Klein, pour 1884.

J'ai reconnu ensuite que les mêmes considérations peuvent être appliquées à la solution de la question générale, si le point C coïncide avec A ( $u = 0$ ), c'est-à-dire à la détermination du maximum et minimum de l'intégrale

$$\int_0^v f(y) dy,$$

et, en généralisant encore la question, aussi à la détermination du maximum et minimum de l'intégrale

$$\int_0^v \Omega(y) f(y) dy,$$

$\Omega(y)$  étant une fonction donnée quelconque, assujettie seulement à quelques restrictions.

Les résultats auxquels je suis parvenu ainsi sont contenus dans les théorèmes suivants :

**THEOREME I.** — *Pour  $n$  égal à un nombre impair  $2k - 1$ , les conditions du problème étant satisfaites, la masse totale de la droite AB peut être concentrée sur  $k + 1$  points de la droite, savoir le point D,  $k - 1$  autres points, qui se déterminent par les données du problème et le point A ou B, selon que les nombres*

$$\varphi_k(v) \text{ et } W_{k-1}(v),$$

$W_{k-1}(z)$  désignant le dénominateur de la  $(k - 1)^{\text{ème}}$  fraction convergente de l'intégrale

$$\int_0^l \frac{f(y)y(l-y)}{z-y} dy$$

ont des signes égaux ou différents.

Les distances

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$$

du point A aux  $k - 1$  points en question sont les racines de l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{(z-v)(z-v')} = 0,$$

$v'$  étant égal à 0 dans le premier cas et à  $l$  dans le second et  $\varphi(z)$

une fonction entière de degré  $k + 1$  déterminée par les conditions

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= 0, & \varphi(v') &= 0, \\ \int_0^l f(y) \varphi(y) y^i dy &= 0 & \text{pour } i &= 0, 1, 2, \dots, k-2. \end{aligned}$$

La masse correspondant à la distance  $x_i$  est donnée par la formule

$$m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi(x_i)},$$

où

$$\psi(z) = \int_0^l f(y) \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y} dy.$$

Cette distribution de la masse donne le maximum de la masse du segment AD, quand on rapporte le point D au segment AD, et le minimum, quand on le rapporte au segment DB.

La même distribution donne aussi le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_0^v \Omega(y) f(y) dy,$$

$\Omega(y)$  étant une fonction quelconque, dont les dérivées

$$\Omega'(y), \quad \Omega''(y), \quad \dots, \quad \Omega^{(n+1)}(y)$$

ne deviennent jamais négatives entre les limites 0 et  $l$ , ainsi que la fonction  $\Omega(y)$  elle-même.

**THÉOREME II.** — *Si  $n$  est égal à  $2k - 1$ , comme ci-dessus, pour toute fonction  $\Omega(y)$  dont la dérivée d'ordre  $n + 1$  n'est jamais négative entre les limites 0 et  $l$ , le minimum de l'intégrale*

$$\int_0^l \Omega(y) f(y) dy$$

*correspond à la concentration de la masse totale sur  $k$  points dont les distances de A sont les racines de l'équation*

$$\varphi_k(z) = 0,$$



et le maximum à la concentration sur les points A et B et  $k - 1$  autres points dont les distances de A sont les racines de l'équation

$$W_{k-1}(z) = 0.$$

THÉOREME III. — Pour  $n$  égal à un nombre pair  $2k$ , les conditions du problème étant satisfaites, la masse totale peut être concentrée sur le point D et  $k$  autres points ou sur les points D, A, B et  $k - 1$  autres points, selon que les dénominateurs

$$U_k(v, 0) \quad \text{et} \quad U_k(v, l)$$

des  $k^{\text{ièmes}}$  fractions convergentes respectivement des intégrales

$$\int_0^l \frac{f(y)y}{v-y} dy \quad \text{et} \quad \int_0^l \frac{(l-y)f(y)}{v-y} dy$$

ont des signes égaux ou contraires.

Dans le premier cas, les distances du point A aux  $K$  points en question se déterminent comme les racines de l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{z-v} = 0,$$

où  $\varphi(z)$  est une fonction entière de degré  $k + 1$ , déterminée par les conditions

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= 0, \\ \int_0^l f(y) \varphi(y) y^i dy &= 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Dans le second, les distances du point A aux  $k - 1$  points cherchés seront les racines de l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{z(z-l)(z-v)} = 0,$$

où  $\varphi(z)$  est une fonction entière de degré  $k + 2$  s'annulant pour  $z = 0$ ,  $z = l$ ,  $z = v$  et satisfaisant aux conditions

$$\int_0^l f(y) \varphi(y) y^i dy = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, k-2.$$

La même distribution donne aussi le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_0^v \Omega(y) f(y) dy,$$

$\Omega(y)$  étant une fonction quelconque, qui ne devient jamais négative, ainsi que ses dérivées

$$\Omega'(y), \quad \Omega''(y), \quad \dots, \quad \Omega^{(n+1)}(y),$$

entre les limites 0 et  $l$ .

THÉORÈME IV. — *Le nombre  $n$  étant égal à  $2k$ , pour toute fonction  $\Omega(y)$  dont la dérivée d'ordre  $n + 1$  ne devient jamais négative entre les limites 0 et  $l$ , le minimum de l'intégrale*

$$\int_0^l \Omega(y) f(y) dy$$

*correspond à la concentration de la masse totale sur le point A et  $k$  autres points, dont les distances de A sont les racines de l'équation*

$$U_k(x, 0) = 0,$$

*et le maximum à la concentration sur le point B et  $k$  autres points dont les distances de A sont les racines de l'équation*

$$U_k(x, l) = 0.$$

Toutes ces propositions, contenant la solution complète des questions posées ci-dessus, ont été démontrées par moi dans ma dissertation *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, publiée en russe en 1884.

Eu égard au théorème II, je ferai remarquer qu'il m'a servi aussi pour le terme complémentaire de la formule connue des quadratures de Gauss et d'autres formules analogues.

D'ailleurs, j'ai obtenu l'expression de ce terme complémentaire en suivant encore une autre voie et prenant pour point de départ l'expression précise du terme complémentaire de la formule d'interpolation de Lagrange, que vous avez donnée dans le T. 84 du *Journal de Crelle*.

Cette nouvelle déduction est publiée en français dans un article

des *Mathematische Annalen* pour 1885. Dans ce dernier temps, je suis parvenu à la conclusion que des théorèmes, tout à fait analogues aux précédents (en faisant abstraction des formules qui servent à déterminer les distances des points cherchés au point A), peuvent être énoncés dans le cas très général, quand les données sont les intégrales

$$\int_0^l f(y) \lambda_1(y) dy, \int_0^l f(y) \lambda_2(y) dy, \dots, \int_0^l f(y) \lambda_{n+1}(y) dy,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  étant des fonctions quelconques données, assujetties seulement aux conditions que les déterminants

$$\lambda_1, \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \\ \lambda''_1 & \lambda''_2 & \lambda''_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n+1} \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \dots & \lambda'_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{(n-1)}_1 & \lambda^{(n-1)}_2 & \dots & \lambda^{(n-1)}_{n+1} \\ \lambda^{(n)}_1 & \lambda^{(n)}_2 & \dots & \lambda^{(n)}_{n+1} \end{vmatrix}$$

soient toujours positifs entre les limites  $y = 0$  et  $y = l$ , et quand il s'agit de trouver les maxima et minima des intégrales

$$\int_0^l \Omega(y) f(y) dy \text{ et } \int_0^v \Omega(y) f(y) dy.$$

Seulement, quand on a à trouver le maximum et le minimum de la première intégrale, il faut restreindre la fonction  $\Omega(y)$  par la condition que

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n+1} & \Omega \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \dots & \lambda'_{n+1} & \Omega' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{(n)}_1 & \lambda^{(n)}_2 & \dots & \lambda^{(n)}_{n+1} & \Omega^{(n)} \\ \lambda^{(n+1)}_1 & \lambda^{(n+1)}_2 & \dots & \lambda^{(n+1)}_{n+1} & \Omega^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

soit  $> 0$  pour toutes les valeurs de  $y$  de 0 à  $l$ , et, dans la recherche du maximum et minimum de la seconde intégrale, il faudra poser  $n + 2$  conditions analogues. Ces restrictions me sont indispensables pour pouvoir étendre certaines propositions, concernant les fonctions en-

tières, aux fonctions de la forme

$$p_1 \lambda_1(y) + p_2 \lambda_2(y) + \dots + p_{n+1} \lambda_{n+1}(y),$$

$p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$  désignant des constantes.

Ainsi, par exemple, au lieu du théorème I, je puis énoncer le suivant :

THÉORÈME I GÉNÉRALISÉ. — *Pour  $n$  impair égal à  $2k - 1$ , le maximum et le minimum de l'intégrale*

$$\int_0^1 \Omega(y) f(y) dy$$

*correspond à la concentration de la masse de AB sur le point D, sur un des points A et B et sur  $k - 1$  certains autres points.*

Les trois autres théorèmes peuvent être généralisés d'une manière analogue.

En terminant, je dois faire remarquer que M. Stieltjes a démontré les inégalités de M. Tchebycheff presque à la même époque que moi et, en outre, dans la Note des *Comptes rendus* (novembre 1884), a indiqué une proposition analogue aux théorèmes II et IV.

Cette proposition de M. Stieltjes est contenue dans mes théorèmes II et IV généralisés, comme cas particulier.



---

MÉMOIRE

SUR LA

COMBINAISON DES SUBSTANCES GAZEUSES

LES UNES AVEC LES AUTRES,

PAR M. GAY-LUSSAC.

---

Lu à la Société philomathique le 31 décembre 1808 <sup>(1)</sup>.

---

Les corps possèdent, à l'état solide, liquide ou gazeux, des propriétés qui sont indépendantes de la force de cohésion ; mais ils en ont aussi d'autres qui paraissent modifiées par cette force très variable dans son intensité et qui dès lors ne suivent plus aucune loi régulière. La même compression appliquée à toutes les substances solides ou liquides produirait une diminution de volume différente pour chacune d'elles, tandis qu'elle serait égale pour tous les fluides élastiques. De même la chaleur dilate tous les corps ; mais les dilatations des liquides et des solides n'ont offert jusqu'à présent aucune loi régulière, et il n'y a encore que celles des fluides élastiques qui soient égales et indépendantes de la nature de chaque gaz. L'attraction des molécules dans les solides et les liquides est donc la cause qui modifie leurs propriétés particulières, et il paraît que ce n'est que lorsqu'elle est entièrement détruite, comme dans les gaz, que les corps, se trouvant placés dans des circonstances semblables, présentent des lois simples et régulières.

---

<sup>(1)</sup> Ce Mémoire a été publié au t. II, p. 207-234, des *Mémoires de Physique et de Chimie de la Société d'Arcueil*, Société composée de Laplace, C.-L. Berthollet, Biot, Gay-Lussac, Humboldt, Thénard, de Candolle, Collet-Descostils, A.-B. Berthollet, Malus.

Je vais du moins faire connaître des propriétés nouvelles dans les gaz, dont les effets sont réguliers, en prouvant que ces substances se combinent entre elles dans des rapports très simples, et que la contraction de volume qu'elles éprouvent par la combinaison suit aussi une loi régulière. J'espère donner par là une preuve de ce qu'ont avancé des chimistes très distingués, qu'on n'est peut-être pas très éloigné de l'époque à laquelle on pourra soumettre au calcul la plupart des phénomènes chimiques.

C'est une question très importante en elle-même et agitée entre les chimistes de savoir si les combinaisons se font dans toutes sortes de proportions. M. Proust, qui paraît avoir fixé le premier son attention sur cet objet, admet que les métaux ne sont susceptibles que de deux degrés d'oxydation, un *minimum* et un *maximum*; mais, entraîné par une théorie séduisante, il s'est vu forcé d'admettre des principes contraires à la Physique pour ramener à deux oxydes tous ceux que présente quelquefois le même métal. M. Berthollet pense, au contraire, d'après des considérations générales et des expériences qui lui appartiennent, que les combinaisons se font toujours dans des proportions très variables, à moins qu'elles ne soient déterminées par des causes particulières, telles que la cristallisation, l'insolubilité ou l'élasticité. Enfin M. Dalton a émis l'idée que les combinaisons entre deux corps se font de manière qu'un atome de l'un s'unisse à un atome de l'autre, ou à deux, ou à trois, ou à un plus grand nombre (<sup>1</sup>). Il résulterait de cette manière d'envisager les combinaisons qu'elles se font dans des proportions constantes, sans qu'il y en ait d'intermédiaires, et, sous ce rapport, la théorie de M. Dalton se rapprocherait de celle de M. Proust; mais M. Berthollet l'a déjà fortement combattue dans l'Introduction qu'il a faite à la Chimie de M. Thomson, et nous verrons, en effet, qu'elle n'est pas entièrement exacte. Tel est l'état de la question maintenant agitée; elle est bien loin d'être résolue, mais j'espère que les faits que je vais énoncer et qui avaient entièrement échappé à l'attention des chimistes concourront à l'éclaircir.

---

(<sup>1</sup>) M. Dalton a été conduit à cette idée par des considérations systématiques, et on voit, par son Ouvrage *New System of chemical Philosophy*, p. 213, et par celui de M. Thomson, t. VI, que ses recherches n'ont point de rapport avec les miennes.

Soupçonnant, d'après le rapport exact de 100 de gaz oxygène à 200 de gaz hydrogène, que nous avions déterminé, M. Humboldt et moi, pour les proportions de l'eau, que les autres gaz pouvaient aussi se combiner dans des rapports simples, j'ai fait les expériences suivantes. J'ai préparé les gaz fluoborique <sup>(1)</sup>, muriatique et carbonique, et je les ai combinés successivement avec le gaz ammoniacal; 100 parties de gaz muriatique saturent précisément 100 parties de ce dernier gaz, et le sel qui en résulte est parfaitement neutre, soit que l'on mette l'un ou l'autre des deux gaz en excès. Le gaz fluoborique s'unit, au contraire, en deux proportions avec le gaz ammoniacal. Lorsqu'on met le gaz alcalin le premier dans le tube gradué et qu'on y fait passer ensuite l'autre gaz, on trouve qu'il se condense un volume égal de l'un et de l'autre, et que le sel formé est neutre. Mais, si l'on commence par mettre le gaz ammoniacal dans le tube et qu'on y fasse arriver ensuite bulle à bulle le gaz fluoborique, le premier se trouvera alors en excès par rapport au second, et il en résultera un sel avec excès de base, composé de 100 de gaz fluoborique et 200 de gaz ammoniacal.

Si l'on met le gaz carbonique avec le gaz ammoniacal en le faisant passer dans le tube tantôt le premier et tantôt le second, il se forme toujours un sous-carbonate <sup>(2)</sup> composé de 100 parties de gaz carbonique et de 200 de gaz ammoniacal. Cependant on peut prouver que le carbonate d'ammoniaque neutre serait composé de volumes égaux de chacun de ses composants. M. Berthollet, qui a analysé ce sel obtenu en faisant passer du gaz carbonique dans le sous-carbonate, a trouvé qu'il était composé en poids de 73,34 de gaz carbonique et de 26,66 de gaz ammoniacal. Or, si l'on suppose qu'il soit composé d'un volume égal de chacun de ses composants, on trouve, d'après leur pesanteur spécifique connue :

Acide carbonique . . . . .	71,81
Ammoniaque . . . . .	28,19
	<hr/>
	100,00

proportion qui diffère peu de la précédente.

---

(<sup>1</sup>) Nous avons donné, M. Thenard et moi, le nom de *gaz fluoborique* au gaz particulier que nous avons obtenu en distillant du fluaté de chaux pur avec l'acide boracique vitreux.

(<sup>2</sup>) C'est le composé désigné sous le nom de *carbamate d'ammoniaque*. (D. G.)

Si le carbonate d'ammoniaque neutre pouvait se former par le mélange du gaz carbonique et du gaz ammoniacal, il s'absorberait donc autant d'un gaz que de l'autre; et puisqu'on ne peut l'obtenir qu'au moyen de l'eau, il faut en conclure que c'est l'affinité de ce liquide qui concourt avec celle de l'ammoniaque pour vaincre l'élasticité de l'acide carbonique et que le carbonate d'ammoniaque neutre ne peut exister qu'au moyen de l'eau.

Ainsi, l'on doit conclure que les gaz muriatique, fluoborique et carbonique prennent exactement un volume de gaz ammoniacal semblable au leur, pour former des sels neutres, et que les deux derniers en prennent le double pour former des *sous-sels*. Il est très remarquable de voir des acides aussi différents les uns des autres neutraliser un volume de gaz ammoniacal égal au leur, et, d'après cela, il est permis de soupçonner que, si tous les acides et tous les alcalis pouvaient être obtenus à l'état gazeux, la neutralité résulterait de la combinaison de volumes égaux d'acide et d'alcali.

Il n'est pas moins remarquable que, soit qu'on obtienne un sel neutre ou un *sous-sel*, leurs éléments se combinent dans des rapports simples qui doivent être considérés comme des limites de leurs proportions. D'après cela, en admettant la pesanteur spécifique de l'acide muriatique, que nous avons déterminée M. Biot et moi <sup>(1)</sup>, et celles des gaz carbonique et ammoniacal données par MM. Biot et Arago, on trouve que le muriate d'ammoniaque sec est composé de

Ammoniaque.....	100,0	ou	38,35
Acide muriatique.....	160,7		<u>61,65</u>
			100,00

proportion qui s'éloigne beaucoup de celle de M. Berthollet :

Ammoniaque.....	100
Acide.....	210

On trouve de même que le sous-carbonate d'ammoniaque contient

Ammoniaque.....	100,0	ou	43,98
Acide carbonique.....	127,3		<u>56,02</u>
			100,00

---

(1) Comme le gaz muriatique contient le quart de son poids d'eau, il ne faut prendre pour l'acide muriatique réel que les trois quarts de sa densité.



et le carbonate neutre

Ammoniaque.....	100,0	ou	28,19
Acide carbonique.....	254,6		<u>71,81</u>
			100,00

Il est facile, d'après les résultats précédents, de connaître les rapports de capacité des acides fluoborique, muriatique et carbonique; car, puisque ces trois gaz saturent le même volume de gaz ammoniacal, leurs capacités seront entre elles en raison inverse de leurs densités, lorsqu'on aura fait la correction due à l'eau contenue dans l'acide muriatique.

On pourrait conclure déjà que les gaz se combinent entre eux dans des rapports très simples; mais je vais en donner encore de nouvelles preuves.

D'après les expériences de M. Amédée Berthollet, l'ammoniaque est composée en volume de

Gaz azote.....	100
Gaz hydrogène.....	300

J'ai trouvé (1<sup>er</sup> vol. de la *Société d'Arcueil*) que l'acide sulfurique est composé de

Gaz sulfureux.....	100
Gaz oxygène.....	50

Lorsqu'on enflamme un mélange de 50 parties de gaz oxygène et de 100 de gaz oxide de carbone, provenant de la distillation de l'oxide de zinc et du charbon fortement calciné, ces deux gaz sont détruits et remplacés par 100 parties de gaz acide carbonique; par conséquent, l'acide carbonique peut être considéré comme composé de

Gaz oxide de carbone.....	100
Gaz oxygène.....	50

M. Davy, en faisant l'analyse des diverses combinaisons de l'azote avec l'oxygène, a trouvé, en poids, les proportions suivantes :

	Azote.	Oxygène.
Gaz oxide d'azote.....	63,30	36,70
Gaz nitreux.....	44,05	55,95
Acide nitrique.....	29,50	70,50

En réduisant ces proportions en volumes, on trouve pour le

	Gaz azote.	Gaz oxygène.
Gaz oxide d'azote . . . . .	100	49,5
Gaz nitreux . . . . .	100	108,9
Acide nitrique . . . . .	100	204,7

La première et la dernière de ces proportions diffèrent peu de celles de 100 à 50 et de 100 à 200; il n'y a que la deuxième qui s'écarte un peu de celle de 100 à 100. La différence n'est cependant pas très grande, et elle est telle qu'on pourrait l'attendre dans de semblables expériences; mais je me suis assuré qu'elle est entièrement nulle. En brûlant la nouvelle substance combustible de la potasse dans 100 parties en volume de gaz nitreux, il est resté exactement 50 de gaz azote, dont le poids retranché de celui du gaz nitreux, déterminé avec beaucoup de soin par M. Bérard à Arcueil, donne pour résultat que ce dernier gaz est composé en volume de parties égales d'azote et d'oxygène.

On doit donc admettre, pour les proportions en volume des combinaisons de l'azote avec l'oxygène :

	Gaz azote.	Gaz oxygène.
Gaz oxide d'azote . . . . .	100	50
Gaz nitreux . . . . .	100	100
Acide nitrique . . . . .	100	200

D'après mes expériences, qui diffèrent très peu de celles de M. Che-  
nevix, l'acide muriatique oxygéné est composé en poids de

Oxygène . . . . .	22,92
Acide muriatique . . . . .	77,08

En convertissant ces quantités en volume, on trouve que l'acide  
muriatique oxygéné est formé de

Gaz muriatique . . . . .	300,0
Gaz oxygène . . . . .	103,2

proportion qui diffère peu de

Gaz muriatique . . . . .	300
Gaz oxygène . . . . .	100 (1)

---

(1) Dans la proportion en poids de l'acide muriatique oxygéné, l'acide muriatique est supposé privé d'eau, tandis que dans celle en volume il est supposé combiné avec un quart

Ainsi il me paraît évident que tous les gaz en agissant les uns sur les autres se combinent toujours dans les rapports les plus simples, et nous avons vu, en effet, dans tous les exemples précédents, que le rapport de combinaison est de 1 à 1, de 1 à 2 ou de 1 à 3. Il est bien important d'observer que, lorsque l'on considère les poids, il n'y a aucun rapport simple et fini entre les éléments d'une première combinaison : ce n'est que lorsqu'il y en a une seconde entre ces mêmes éléments que la nouvelle proportion de celui qui a été ajouté est un multiple de la première. Les gaz, au contraire, dans telles proportions qu'ils puissent se combiner, donnent toujours lieu à des composés dont les éléments, en volume, sont des multiples des uns des autres.

Non seulement les gaz se combinent dans des proportions très simples, comme on vient de le voir, mais encore la contraction apparente de volume qu'ils éprouvent par la combinaison a aussi un rapport simple avec le volume des gaz ou plutôt avec celui de l'un d'eux.

J'ai dit, d'après M. Berthollet, que 100 parties de gaz oxide de carbone, provenant de la distillation de l'oxide de zinc et du charbon fortement calciné, produisent 100 parties de gaz carbonique en se combinant avec 50 de gaz oxigène. Il résulte de là que la contraction apparente des deux gaz est précisément de tout le volume du gaz oxigène ajouté. La densité du gaz carbonique est donc égale à celle du gaz oxide de carbone, plus la moitié de celle du gaz oxigène : ou, inversement, la densité du gaz oxide de carbone est égale à celle du gaz carbonique, moins la moitié de celle du gaz oxigène. D'après cela, et en prenant la densité de l'air pour unité, on trouve que celle du gaz oxide de carbone est 0,9678 au lieu de 0,9569 que M. Cruicks-

---

de son poids d'eau, que depuis la lecture de ce Mémoire nous avons démontré, M. Thenard et moi, être absolument nécessaire à son état gazeux. Mais, comme le rapport simple de 300 d'acide à 100 d'oxigène ne peut être dû au hasard, il faudrait en conclure que l'eau, en se combinant avec l'acide muriatique sec, pour former le gaz muriatique ordinaire, ne change pas sensiblement sa pesanteur spécifique. On serait conduit à la même conclusion par cette considération que la pesanteur spécifique de l'acide muriatique oxigéné qui, d'après nos expériences, ne contient point d'eau, est exactement la même que celle obtenue en ajoutant la densité du gaz oxigène à trois fois celle du gaz muriatique, et en prenant la moitié de cette somme. Nous avons aussi trouvé, M. Thenard et moi, que le gaz muriatique oxigéné contient précisément la moitié de son volume de gaz oxigène. et qu'il peut détruire, par conséquent, un volume d'hydrogène égal au sien.

hanks avait déterminée par l'expérience. On sait, d'ailleurs, qu'un volume donné de gaz oxygène produit un volume égal d'acide carbonique; par conséquent le gaz oxygène, en formant avec le charbon le gaz oxide de carbone, double de volume, de même que le gaz carbonique en passant sur du charbon rouge. Le gaz oxygène produisant un volume égal de gaz carbonique et la pesanteur de ce dernier étant bien connue, il est facile d'en conclure la proportion de ses éléments. C'est ainsi qu'on trouve que le gaz carbonique est composé de

Carbone . . . . .	27,38
Oxygène . . . . .	72,62

et le gaz oxide de carbone de

Carbone . . . . .	42,99
Oxygène . . . . .	57,01

En suivant une marche analogue, on trouve de même que, si le soufre prend 100 parties d'oxygène pour produire l'acide sulfureux, il en prend 150 pour produire l'acide sulfurique. En effet, d'après les expériences de MM. Klaproth, Bucholz et Richter, l'acide sulfurique est composé, en poids, de 100 de soufre et 138 d'oxygène.

D'un autre côté, l'acide sulfurique est composé de deux parties en volume de gaz sulfureux et de 1 de gaz oxygène. Par conséquent, le poids d'une certaine quantité d'acide sulfurique doit être le même que celui de 2 parties d'acide sulfureux et de 1 de gaz oxygène, c'est-à-dire  $2 \times 2,265$ , plus  $1,10359 = 5,63359$ ; attendu que, d'après Kirwan, le gaz sulfureux pèse 2,265, la densité de l'air étant prise pour unité. Mais, d'après la proportion de 100 de soufre à 138 d'oxygène, cette quantité renferme 3,26653 d'oxygène, et si l'on en retranche 1,10359, il restera 2,16294 pour le poids de l'oxygène renfermé dans 2 parties d'acide sulfureux ou 1,08147 pour celui de l'oxygène renfermé dans 1 partie.

Or, comme cette dernière quantité ne diffère que de 2 centièmes de 1,10359 qui représente le poids d'une partie de gaz oxygène, il faut en conclure que le gaz oxygène, en se combinant avec le soufre pour former le gaz sulfureux, n'éprouve qu'une diminution de volume d'un cinquantième, et qu'elle serait probablement nulle si les données dont

je me suis servi étaient plus exactes. Dans cette dernière supposition, et d'après la pesanteur spécifique du gaz sulfureux de Kirwan, on trouverait que cet acide est composé de

Soufre .....	100,00
Oxigène .....	95,02

Mais si, en partant des proportions précédentes de l'acide sulfurique, on admet, comme cela paraît probable, que 100 de gaz sulfureux renferment 100 de gaz oxigène, et qu'il faut leur en ajouter encore 50 pour les convertir en acide sulfurique, on obtiendra, pour les proportions de l'acide sulfureux,

Soufre .....	100,00
Oxigène .....	92,00

Sa pesanteur spécifique, calculée dans ces mêmes suppositions et rapportée à celle de l'air serait 2,30314 au lieu de 2,2650 que M. Kirwan a trouvée directement <sup>(1)</sup>.

Le phosphore a les plus grands rapports avec le soufre, attendu qu'ils ont à peu près l'un et l'autre la même pesanteur spécifique. Par conséquent le phosphore doit prendre deux fois plus d'oxigène pour devenir acide phosphoreux que pour passer de cet état à celui d'acide phosphorique. Et puisque ce dernier est composé, d'après Rose, de

Phosphore .....	100,0
Oxigène .....	114,0

---

(1) Il serait nécessaire, pour faire disparaître ces différences, de faire de nouvelles expériences sur la densité du gaz sulfureux, sur la combinaison directe du gaz oxigène avec le soufre, pour voir s'il y a contraction, et sur la combinaison du gaz sulfureux avec le gaz ammoniacal. J'ai trouvé, à la vérité, en chauffant du cinabre dans du gaz oxigène, que 100 parties de ce gaz ne produisent que 93 de gaz sulfureux. Il m'a semblé aussi qu'il fallait moins de gaz sulfureux que de gaz ammoniacal pour obtenir un sel neutre. Mais, comme ces expériences n'ont pas été faites dans des circonstances convenables, surtout la dernière qui ne peut être faite qu'au moyen de l'eau, le gaz sulfureux se décomposant et laissant précipiter du soufre aussitôt qu'il est mêlé avec le gaz ammoniacal, je me propose, avant d'en tirer aucune conséquence, de les reprendre et d'en déterminer exactement toutes les circonstances. Cela est d'autant plus nécessaire que, le gaz sulfureux étant bien connu dans ses proportions, on pourra s'en servir pour analyser le gaz hydrogène sulfuré.

il s'ensuit que l'acide phosphoreux doit contenir

Phosphore.....	100,0
Oxigène.....	76,0

Nous avons vu que 100 parties de gaz azote prennent 50 parties de gaz oxygène pour former le gaz oxide d'azote, et 100 parties de gaz oxygène pour former le gaz nitreux. Dans le premier cas, la contraction est un peu plus forte que le volume du gaz oxygène ajouté ; car la pesanteur spécifique du gaz oxide d'azote, calculée dans cette hypothèse, est 1,52092, tandis que celle donnée par M. Davy est 1,61414. Mais il est aisé de faire voir, par des expériences de M. Davy, que la contraction apparente est précisément de tout le volume du gaz oxygène ajouté. En faisant passer l'étincelle électrique à travers un mélange de 100 parties de gaz hydrogène et de 97,5 de gaz oxide d'azote, le gaz hydrogène est détruit, et il reste 102 parties de gaz azote renfermant celui qui est presque toujours mêlé avec le gaz hydrogène, et de plus un peu de ce dernier gaz échappé à la combustion. Le résidu, toute correction faite, serait donc à peu près égal en volume au gaz oxide d'azote employé. De même, en faisant passer l'étincelle électrique à travers un mélange de 100 parties de gaz hydrogène phosphoré et de 250 de gaz oxide d'azote, il se forme de l'eau et de l'acide phosphorique, et il reste exactement 250 parties de gaz azote ; preuve évidente, encore, que la contraction apparente des éléments du gaz oxide d'azote est de tout le volume du gaz oxygène ajouté. D'après cette considération, sa pesanteur spécifique rapportée à celle de l'air doit être 1,52092.

La contraction apparente des éléments du gaz nitreux paraît, au contraire, nulle. Si l'on admet, en effet, comme je l'ai fait voir, qu'il est composé de parties égales de gaz oxygène et de gaz azote, on trouve que sa densité, calculée dans l'hypothèse où il n'y aurait aucune condensation de volume, est 1,036, tandis que celle déterminée directement est 1,038.

Saussure a trouvé que la densité de la vapeur de l'eau est à celle de l'air comme 10 est à 14. En supposant que la contraction de volume des deux gaz soit seulement de tout le volume du gaz oxygène ajouté, on trouve, au lieu de ce rapport, celui de 10 à 16. Cette différence et l'autorité d'un physicien aussi distingué que Saussure

sembleraient faire rejeter la supposition que je viens de faire ; mais voici plusieurs circonstances qui la rendent très probable. Elle a d'abord pour elle une très forte analogie ; en second lieu, M. Trales a trouvé, par des expériences directes, que le rapport de la densité de la vapeur de l'eau à celle de l'air est de 10 à 14,5, au lieu de 10 à 14. En troisième lieu, quoiqu'on ne connaisse pas très exactement le volume qu'occupe l'eau en passant à l'état élastique, on sait, d'après les expériences de M. Watt, qu'un ponce cube d'eau produit à peu près un pied cube de vapeur, c'est-à-dire un volume 1728 fois plus grand. Or, en admettant le rapport de Saussure, on trouve seulement 1488 pour le volume qu'occupe l'eau lorsqu'elle est en vapeur, et, en admettant celui de 10 à 16, on aurait 1700,6. Enfin la réfraction de la vapeur aqueuse, calculée dans l'hypothèse de 10 à 14, est un peu plus forte que celle donnée par l'observation, mais celle calculée en adoptant le rapport 10 à 16 concilie beaucoup mieux les résultats de la théorie et de l'expérience. Voilà donc plusieurs considérations qui rendent très probable le rapport de 10 à 16.

Le gaz ammoniacal est composé en volume de 3 parties de gaz hydrogène et de 1 de gaz azote, et sa densité comparée à celle de l'air est 0,596 ; mais, si l'on suppose que la contraction apparente soit de la moitié du volume total, on trouve 0,591 pour sa densité. Ainsi il est démontré, par cet accord presque parfait, que la contraction apparente de ses éléments est précisément de la moitié du volume total ou plutôt du double de celui de l'azote.

J'ai prouvé précédemment que le gaz muriatique oxigéné était composé de 300 parties de gaz muriatique et de 100 de gaz oxigène. En admettant que la contraction apparente des deux gaz soit de la moitié du volume total, on trouve pour sa densité 2,468, et par l'expérience 2,470. Je me suis aussi assuré par plusieurs expériences que les proportions de ses éléments sont telles, qu'il forme des sels neutres avec les métaux. Par exemple, si l'on fait passer du gaz muriatique oxigéné sur du cuivre, il se forme du muriate vert légèrement acide, et il se précipite un peu d'oxide de cuivre, parce que ce sel ne peut pas être obtenu parfaitement neutre. Il suit de là que dans tous les muriates, comme dans l'acide muriatique oxigéné, l'acide réduit en volume est triple de l'oxigène. Il en serait de même des carbonates et des fluates

dont les acides, sous des volumes égaux, ont la même capacité de saturation que l'acide muriatique.

On voit donc, par ces divers exemples, que la contraction qu'éprouvent deux gaz en se combinant suit un rapport à peu près exact avec leur volume, ou plutôt avec celui de l'un deux. Il n'existe, en effet, que de très petites différences entre les densités des composés obtenues par le calcul et celles que donne l'expérience, et il est probable qu'en se livrant à de nouvelles recherches on les verrait disparaître complètement.

En se rappelant cette grande loi de l'affinité chimique, que toute combinaison donne lieu à un rapprochement des molécules élémentaires, on conçoit difficilement pourquoi le gaz oxide de carbone est plus léger que le gaz oxygène. C'est même la principale raison sur laquelle s'est appuyé M. Berthollet pour admettre l'existence de l'hydrogène dans ce gaz et expliquer par là sa faible densité. Mais il me semble que la difficulté provient de ce que l'on suppose que le rapprochement des molécules élémentaires est représenté dans les gaz par la diminution de volume qu'ils éprouvent en se combinant. Cette supposition n'est pas toujours vraie, et l'on pourrait citer plusieurs combinaisons gazeuses dont les molécules constituantes seraient très rapprochées, quoique la diminution de volume fût nulle, et qu'il y eût même dilatation. Tel est le gaz nitreux considéré comme formé directement de gaz azote et de gaz oxygène, ou de ce dernier et de gaz oxide d'azote. Dans le premier cas, il n'y a point diminution de volume et dans le second il y aurait au contraire dilatation, puisque 100 parties de gaz oxide d'azote et 50 de gaz oxygène en produiraient 200 de gaz nitreux. On sait encore que le gaz carbonique représente exactement un volume égal de gaz oxygène, et que l'affinité qui réunit ses éléments est très forte. Cependant, si l'on admettait que la condensation des éléments a un rapport immédiat avec la condensation de volume, on en conclurait, à la vérité contre l'expérience, qu'elle est nulle. Autrement il faudrait supposer que si le carbone était à l'état gazeux, il se combinerait à volume égal, ou dans toute autre proportion, avec l'oxygène, et qu'alors la condensation apparente serait de tout le volume du carbone gazeux. Mais si l'on fait cette supposition pour l'acide carbonique, on peut aussi la faire pour le gaz oxide de carbone, en admettant, par



exemple, que 100 parties de carbone gazeux, en se combinant avec 50 de gaz oxygène, en produiraient 100 de ce gaz. Quoi qu'il en soit de ces suppositions qui ne peuvent servir qu'à faire concevoir que le gaz oxygène peut produire un composé plus léger que lui, en se combinant avec un corps solide, on doit admettre, comme vérité fondée sur un très grand nombre d'observations, que la condensation qu'éprouvent les molécules de deux corps qui se combinent, particulièrement de deux gaz, n'a point de rapport immédiat avec la condensation de volume, puisqu'on voit souvent que, pendant que l'une est très forte, l'autre est très faible ou même nulle.

L'observation que les combustibles gazeux se combinent avec le gaz oxygène dans les rapports simples de 1 à 1, de 1 à 2, de 1 à  $\frac{1}{2}$ , peut nous conduire à déterminer la densité des vapeurs des corps combustibles, ou au moins à approcher beaucoup de cette détermination. Si l'on suppose, en effet, tous les corps combustibles à l'état gazeux, un volume déterminé de chacun d'eux absorberait un volume égal d'oxygène, ou le double ou seulement la moitié. Et comme on connaît la proportion d'oxygène que prend chaque corps combustible à l'état solide ou liquide, il suffit de convertir l'oxygène en volume et d'y convertir aussi le combustible, d'après la condition que sa vapeur soit égale au volume du gaz oxygène, ou au double, ou à la moitié. Par exemple, le mercure est susceptible de deux degrés d'oxidation, et on peut comparer le premier au gaz oxide d'azote. Or, d'après MM. Fourcroy et Thenard, 100 parties de mercure en absorbent 4,16 qui, réduites en gaz, occuperaient un espace représenté par 8,20. Ces 100 parties de mercure réduites en vapeurs devront donc occuper un espace double, c'est-à-dire, 16,40. On conclut de là que la densité de la vapeur de mercure est 12,01 fois plus dense que celle du gaz oxygène, et que le métal, en passant de l'état liquide à l'état gazeux, prend un volume 961 fois plus grand.

Je ne m'occuperai pas plus longtemps de ces déterminations, parce qu'elles ne sont fondées que sur des analogies, et que d'ailleurs il est aisé de les multiplier. Je terminerai ce Mémoire par examiner si les combinaisons se font dans des proportions constantes ou variables ; les expériences que je viens de rapporter me conduisent à la discussion de ces deux opinions.

D'après l'idée ingénieuse de M. Dalton, que les combinaisons se font d'atome à atome, les divers composés que deux corps peuvent former seraient produits par la réunion d'une molécule de l'un avec une molécule de l'autre, ou avec deux ou avec un plus grand nombre, mais toujours sans intermédiaires. MM. Thomson et Wollaston rapportent, en effet, des expériences qui semblent confirmer cette théorie. Le premier a trouvé que le suroxalate de potasse contient deux fois plus d'acide qu'il n'en faut pour saturer l'alcali ; et le second, que le sous-carbonate de potasse contient, au contraire, deux fois plus d'alcali qu'il n'en faudrait pour saturer l'acide.

Les résultats nombreux que j'ai fait connaître dans ce Mémoire sont aussi très favorables à cette théorie. Mais M. Berthollet, qui pense que les combinaisons se font d'une manière continue, cite pour preuve de son opinion les sulfates acides, le verre, les alliages et les mélanges de divers liquides, composés tous très variables dans leurs proportions, et il insiste principalement sur l'identité de la force qui produit les combinaisons chimiques et les dissolutions.

Ces deux opinions ont donc chacune en leur faveur un très grand nombre de faits ; mais, quoique entièrement opposées en apparence, il est aisé de les concilier.

Il faut d'abord admettre, avec M. Berthollet, que l'action thermique s'exerce indéfiniment d'une manière continue entre les molécules des corps, quels que soient leur nombre et leur rapport, et que, en général, on peut obtenir des composés à proportions très variables. Mais ensuite, il faut admettre en même temps qu'outre l'insolubilité, la cohésion et l'élasticité qui tendent à produire des combinaisons dans des proportions fixes, l'action chimique s'exerce plus puissamment lorsque les éléments sont entre eux dans des rapports simples, ou dans des proportions multiples les uns des autres, et qu'elle produit alors des composés qui se séparent plus aisément. On concilie de cette manière les deux opinions, et l'on maintient cette grande loi chimique : que toutes les fois que deux substances sont en présence l'une de l'autre, dans leur sphère d'activité, elles agissent par leurs masses et donnent en général des composés à proportions très variables, à moins que ces proportions ne soient déterminées par des circonstances particulières.

*Conclusion.*

J'ai fait voir dans ce Mémoire que les combinaisons des substances gazeuses, les unes avec les autres, se font toujours dans les rapports les plus simples, et tels qu'en représentant l'un des termes par l'unité, l'autre est 1 ou 2 ou au plus 3. Ces rapports de volume ne s'observent point dans les substances solides et liquides, ou lorsqu'on considère les poids, et ils sont une nouvelle preuve que ce n'est effectivement qu'à l'état gazeux que les corps sont placés dans les mêmes circonstances et qu'ils présentent des lois régulières. Il est remarquable de voir que le gaz ammoniacal neutralise exactement un volume semblable au sien des acides gazeux, et il est probable que si les acides et les alcalis étaient à l'état élastique, ils se combineraient tous à volume égal pour produire des sels neutres. La capacité de saturation des acides et des alcalis, mesurée par les volumes, serait donc la même, et ce serait peut être la vraie manière de l'évaluer. Les contractions apparentes de volume qu'éprouvent les gaz en se combinant ont aussi des rapports simples avec le volume de l'un deux, et cette propriété est encore particulière aux substances gazeuses (1).

---

*Lettre de M. AMPÈRE à M. le comte BERTHOLLET, sur la détermination des proportions dans lesquelles les corps se combinent d'après le nombre et la disposition respective des molécules dont leurs parties intégrantes sont composées (2).*

MONSIEUR LE COMTE,

Vous savez que, depuis longtemps, l'importante découverte de M. Gay-Lussac sur les proportions simples qu'on observe entre les volumes d'un gaz com-

---

(1) On a jugé utile de réimprimer, à la suite du Mémoire de Gay-Lussac, la partie de la Lettre à Berthollet, dans laquelle Ampère formule la célèbre hypothèse sur la constitution des gaz. (D. G.).

(2) *Annales de Chimie*, t. XC, p. 43; 30 avril 1814.

posé et ceux des gaz composants m'a fait naître l'idée d'une théorie qui explique non seulement les faits découverts par cet habile chimiste et les faits analogues observés depuis, mais qui peut encore s'appliquer à la détermination des proportions d'un grand nombre d'autres composés qui, dans les circonstances ordinaires, n'affectent point l'état gazeux.

Le Mémoire dans lequel j'expose cette théorie avec tous les détails nécessaires est presque terminé; mais, comme des occupations d'un autre genre ne me permettent pas d'y travailler actuellement, je m'empresse de répondre au désir que vous m'avez manifesté de le connaître, en vous en présentant un extrait.

Des conséquences déduites de la théorie de l'attraction universelle, considérée comme cause de la cohésion, et la facilité avec laquelle la lumière traverse les corps transparents ont conduit les physiciens à penser que les dernières molécules des corps étaient tenues par les forces attractives et répulsives qui leur sont propres, à des distances comme infiniment grandes relativement aux dimensions de ces molécules.

Dès lors leurs formes, qu'aucune observation directe ne peut d'ailleurs nous faire connaître, n'ont plus aucune influence sur les phénomènes que présentent les corps qui en sont composés, et il faut chercher l'explication de ces phénomènes dans la manière dont ces molécules se placent les unes à l'égard des autres pour former ce que je nomme une *particule*.

D'après cette notion, on doit considérer une particule comme l'assemblage d'un nombre déterminé de molécules dans une situation déterminée, renfermant entre elles un espace incomparablement plus grand que le volume des molécules; et, pour que cet espace ait trois dimensions comparables entre elles, il faut qu'une particule réunisse au moins quatre molécules. Pour exprimer la situation respective des molécules dans une particule, il faut concevoir, par les centres de gravité de ces molécules, auxquels on peut les supposer réduites, des plans situés de manière à laisser d'un même côté toutes les molécules qui se trouvent hors de chaque plan. En supposant qu'aucune molécule ne soit renfermée dans l'espace compris entre ces plans, cet espace sera un polyèdre dont chaque molécule occupera un sommet, et il suffira de nommer ce polyèdre pour exprimer la situation respective dont se compose une particule. Je donnerai à ce polyèdre le nom de *forme représentative de la particule*.

Les corps cristallisés étant formés par la juxtaposition régulière des particules, la division mécanique y indiquera des plans parallèles aux faces de ce polyèdre; mais elle pourra en indiquer d'autres résultant des diverses lois de décroissement: rien n'empêche d'ailleurs que ceux-ci ne soient souvent plus faciles à obtenir qu'une partie des premiers, et dès lors la division mécanique peut bien fournir des conjectures, mais seulement des conjectures, pour la détermination des formes représentatives. Il est un autre moyen de connaître

ces formes ; c'est de déterminer, par le rapport des composants d'un corps, le nombre des molécules qui se trouvent dans chaque particule de ce corps. Je suis parti, pour cela, de la supposition que, dans le cas où les corps passent à l'état de gaz, leurs particules seules soient séparées et écartées les unes des autres par la force expansive du calorique à des distances beaucoup plus grandes que celles où les forces d'affinité et de cohésion ont une action appréciable, en sorte que ces distances ne dépendent que de la température et de la pression que supporte le gaz, et qu'à des pressions et des températures égales, les particules de tous les gaz, soit simples, soit composés, sont placées à la même distance les unes des autres. Le nombre des particules est, dans cette supposition, proportionnel au volume des gaz <sup>(1)</sup>. Quelles que soient les raisons théoriques qui me semblent l'appuyer, on peut ne la considérer que comme une hypothèse ; mais, en comparant les conséquences qui en sont une suite nécessaire avec les phénomènes ou les propriétés que nous observons, si elle s'accorde avec tous les résultats connus de l'expérience, si l'on en déduit des conséquences qui se trouvent confirmées par des expériences ultérieures, elle pourra acquérir un degré de probabilité qui approchera de ce qu'on nomme en Physique la *certitude*. En la supposant admise, il suffira de connaître les volumes à l'état de gaz d'un corps composé et de ses composants, pour savoir combien une particule du corps composé contient de particules ou de portions de particule de deux composants. Le gaz nitreux contenant par exemple la moitié de son volume en oxygène et la moitié en azote, il s'ensuit qu'une particule de gaz nitreux est formée par la réunion de la moitié d'une particule d'oxygène et de la moitié d'une particule d'azote ; le gaz formé par la combinaison du chlore et de l'oxide de carbone contenant des volumes de ces deux gaz qui sont égaux au sien, une de ses particules est formée par la réunion d'une particule de chlore et d'une particule d'oxide de carbone ; l'eau en vapeur contenant, d'après les belles expériences de M. Gay-Lussac, un volume égal d'hydrogène et la moitié de son volume en oxygène, une de ses particules sera composée d'une particule entière d'hydrogène et de la moitié d'une particule d'oxygène ; par la même raison, une particule de gaz oxide d'azote contiendra une particule entière d'azote, et la moitié d'une particule d'oxygène ; enfin un volume de gaz ammoniacal étant composé d'un demi-volume d'azote et d'un volume et demi d'hydrogène, une particule de ce gaz contiendra la moitié d'une particule d'azote et une particule et demie d'hydrogène.

Si nous admettons comme la supposition la plus simple, supposition qui me paraît d'ailleurs suffisamment justifiée par l'accord des conséquences que j'en ai déduites avec les phénomènes, que les particules de l'oxygène, de l'a-

---

(1) Depuis la rédaction de mon Mémoire, j'ai appris que M. Avogadro avait fait de cette dernière idée la base d'un travail sur les proportions des éléments dans les combinaisons chimiques.

zote et de l'hydrogène sont composées de 4 molécules, nous en concluons que celles du gaz nitreux sont aussi composées de 4 molécules, 2 d'oxygène et 2 d'azote ; celles du gaz oxide d'azote, de 6 molécules, 4 d'azote et 2 d'oxygène ; celles de la vapeur d'eau, de 6 molécules, 4 d'hydrogène et 2 d'oxygène, et celles du gaz ammoniacal, de 8 molécules, 6 d'hydrogène et 2 d'azote.

---

SUR LES  
**FONCTIONS D'UNE VARIABLE**<sup>(1)</sup>

ANALOGUES AUX  
**FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES,**

PAR M. E. GOURSAT,  
MAÎTRE DE CONFÉRENCES À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

Tous les géomètres connaissent le beau Mémoire de Riemann sur les fonctions hypergéométriques. L'illustre auteur établit que ces fonctions sont définies par leurs points de ramification et les exposants de discontinuité, entre lesquels doit exister une certaine relation. Les travaux de M. Fuchs sur la théorie des équations linéaires ont rendu ces résultats immédiats et ont permis de les généraliser de différentes façons. Mais toutes ces généralisations offrent à première vue quelque chose d'arbitraire, qui tient à l'indétermination même du problème. Si, en effet, on essaye d'étendre la définition de Riemann aux intégrales d'équations linéaires d'un ordre supérieur au second ou ayant plus de trois points critiques, on voit immédiatement que cette extension ne peut se faire sans modification. Il faudra imposer aux intégrales, outre les conditions de Riemann, des conditions nouvelles, et il est évident qu'*a priori* rien n'empêche de les choisir d'une façon tout à fait arbitraire, pourvu que le problème devienne déterminé. Mais, si l'on se laisse guider par les généralisations déjà obtenues et par la théorie des intégrales régulières de M. Fuchs, on est conduit à imposer aux intégrales des conditions nouvelles d'une forme très simple. Ces conditions consistent, d'une manière générale, à supposer que, dans le domaine de quelques-uns des points critiques, il existe plusieurs branches linéairement indépendantes, telles que le quotient de deux d'entre elles est uniforme dans ce domaine.

---

(1) Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (25 janvier 1886).

Le problème se trouve alors décomposé en deux autres. D'une part, on a à calculer les solutions en nombres entiers et positifs de certaines équations arithmétiques. Ces équations admettent deux systèmes de solutions connues qui correspondent aux fonctions de M. Pochhammer (*Journal de Crelle*, t. 71) et aux séries hypergéométriques d'ordre supérieur (*Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. XII). Mais ces deux solutions ne sont en quelque sorte que les termes extrêmes d'une série indéfinie de solutions ; ce qui montre que la question est loin d'être épuisée.

Connaissant un système de solutions des équations précédentes, la détermination des coefficients de l'équation linéaire correspondante exige des calculs algébriques, qui paraissent devoir être en général assez compliqués. En faisant une hypothèse de plus, on est conduit à un cas particulier intéressant (auquel on peut d'ailleurs ramener tous les autres), où les coefficients sont fournis par des équations du premier degré. Il y a deux types d'équations de cette espèce du troisième ordre, qui du reste sont bien connus. Il y en a six pour les équations du quatrième ordre, dont trois sont connus déjà complètement ; un cas particulier d'un des autres types a été rencontré par M. Brioschi dans ses recherches sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques.

Toutes ces équations jouissent d'une propriété importante. On peut, par des calculs algébriques, déterminer les substitutions que subit un système fondamental d'intégrales convenablement choisi quand on fait décrire à la variable un contour fermé quelconque. Les coefficients de ces substitutions sont des fonctions *algébriques* des multiplicateurs des intégrales dans le domaine des points critiques et ne dépendent pas des points critiques eux-mêmes. Dans les cas particuliers auxquels j'ai appliqué la méthode, ces coefficients sont des fonctions *rationnelles* des multiplicateurs. Le petit nombre d'équations linéaires pour lesquelles on a pu résoudre effectivement ce problème donne, il me semble, quelque intérêt à cette proposition. On en déduit un certain nombre de conséquences, qu'il est bien facile d'apercevoir.

Pour éviter toute ambiguïté, je réserverai le nom de fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur aux fonctions que j'ai étudiées dans le travail déjà cité (*Annales de l'École Normale*).



1. Soit

$$\Phi(y) = 0$$

une équation linéaire à coefficients rationnels et à intégrales régulières, ayant en tout  $\rho$  points singuliers,  $a_1, a_2, \dots, a_{\rho-1}, a_\rho$ , y compris le point  $x = \infty$ , que nous supposons toujours un point véritablement singulier, de sorte que l'on posera  $a_\rho = \infty$ . La forme générale de cette équation sera, comme on sait,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(y) = & [\psi(x)]^m \frac{d^m y}{dx^m} + [\psi(x)]^{m-1} F_{\rho-2}(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \\ & + [\psi(x)]^{m-2} F_{2(\rho-2)}(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + F_{m(\rho-2)}(x) y = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{\rho-1})$$

et où  $F_{\rho-2}(x), \dots, F_{m(\rho-2)}(x)$  sont des polynômes d'un degré marqué par leur indice ou de degré moindre. Le nombre total de coefficients arbitraires que contient l'équation la plus générale de cette espèce, quand on regarde les points critiques comme donnés, est donc égal à

$$\rho - 2 + 1 + 2(\rho - 2) + 1 + \dots + m(\rho - 2) + 1 = (\rho - 2) \frac{m(m+1)}{2} + m.$$

Considérons les diverses équations déterminantes fondamentales relatives aux points critiques  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$  de l'équation (1), la somme des racines de ces  $\rho$  équations ne dépend pas des coefficients de l'équation (1). On a en effet la relation suivante, qu'il est bien aisé d'établir,

$$(2) \quad \Sigma r = \frac{m(m-1)(\rho-2)}{2}.$$

Il suit de là que de ces  $m\rho$  racines  $m\rho - 1$  seulement peuvent être prises arbitrairement, et la dernière sera alors déterminée par la relation (2). La connaissance de ces  $m\rho - 1$  racines entraîne  $m\rho - 1$  équations de condition bien connues entre les coefficients de l'équation (1), nombre inférieur au nombre total des coefficients dès que  $m$  est supérieur à 2 ou  $\rho$  supérieur à 3. Supposons, pour prendre le cas général, que, parmi les racines de chaque équation déterminante, il n'y en ait pas deux dont la différence soit un nombre entier; les coeffi-

cients de l'équation (1) étant choisis de façon à satisfaire aux conditions précédentes, cette équation possédera bien, dans le domaine de chacun des points critiques,  $m$  intégrales appartenant respectivement aux exposants voulus. Mais, comme il reste encore un certain nombre de coefficients arbitraires, on voit que, quand on se donne la forme d'un système fondamental d'intégrales dans le domaine de chacun des points critiques, cela ne suffit pas pour déterminer complètement l'équation ni par suite ses intégrales. Les intégrales de l'équation linéaire la plus générale d'ordre  $m$  ayant  $\rho$  points singuliers, de la forme écrite plus haut, ne sont donc pas susceptibles d'une définition analogue à celle de Riemann pour les fonctions hypergéométriques de Gauss.

2. Il est donc nécessaire, pour généraliser le problème, d'imposer aux intégrales de nouvelles conditions. On pourrait, par exemple, faire intervenir les relations linéaires entre les différents systèmes d'intégrales (voir RIEMANN, *Gesammelte Werke*, p. 357); mais les généralisations connues jusqu'ici reposent sur des principes tout différents, que la théorie générale de M. Fuchs permet encore d'exposer très simplement. Supposons qu'une ou plusieurs des équations déterminantes contiennent des groupes de racines, dont les différences mutuelles sont des nombres entiers tous différents de zéro. Si on laisse aux coefficients restés arbitraires toute leur indétermination, il s'introduira forcément des termes logarithmiques dans le groupe d'intégrales correspondant; et, si l'on veut faire disparaître ces termes logarithmiques, on sera amené à introduire de nouvelles équations de condition entre les coefficients. Pour plus de précision, soit  $x = a$  un point singulier quelconque d'une équation linéaire analogue à l'équation (1) et

$$r, \quad r + n_1, \quad r + n_2, \quad \dots \quad r + n_{\lambda-1},$$

un groupe de  $\lambda$  racines de l'équation déterminante relative à ce point, où  $n_1, n_2, \dots, n_{\lambda-1}$  sont des nombres entiers positifs tous différents, rangés par ordre de grandeur croissante; admettons en outre que, pour une autre racine  $r'$  ne faisant pas partie du groupe, la différence  $r' - r$  n'est jamais un nombre entier. Pour que l'équation proposée admette, dans le domaine du point  $x = a$ ,  $\lambda$  intégrales linéairement distinctes de la forme

$$(x - a)^r P(x - a), \quad (x - a)^{r+n_1} P_1(x - a), \quad \dots,$$

où  $P(x-a)$ ,  $P_1(x-a)$ , ... désignent des fonctions holomorphes dans ce domaine et différentes de zéro pour  $x = a$ , il faudra que les coefficients de l'équation proposée vérifient en outre

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$$

équations de condition qui, jointes aux  $\lambda$  relations qui expriment que  $r$ ,  $r+n_1$ , ...,  $r+n_{\lambda-1}$  sont racines de l'équation déterminante, donnent en tout

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

équations entre les coefficients de l'équation proposée. Si l'on pose

$$\omega = e^{2i\pi r},$$

on voit que toutes les intégrales précédentes sont multipliées par le facteur  $\omega$  lorsque la variable décrit un lacet dans le sens direct autour du point  $x = a$ ; je dirai, pour abrégé, que ces intégrales ont le même *multiplicateur*. Ainsi l'existence d'un groupe de  $\lambda$  intégrales ayant le même multiplicateur dans le domaine d'un point critique et appartenant respectivement à des exposants déterminés entraîne

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

équations de condition entre les coefficients de l'équation (1).

En particulier, si l'on suppose  $\lambda = m$ , toutes les intégrales auront, dans les environs du point  $x = a$ , le même multiplicateur, et ce point ne sera qu'un point singulier apparent ou du moins on pourra le ramener à être tel par un changement bien connu de fonction. On peut remarquer que l'existence de ce point singulier apparent exige

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

équations de condition et que le nombre des coefficients de l'équation (1) augmente d'autant lorsque le nombre des points critiques augmente d'une unité. La présence d'un point singulier apparent *connu* n'introduit par conséquent aucun nouveau paramètre.

3. Cela posé, nous partagerons les racines de l'équation déterminante, relative à un point singulier  $a_i$ , en  $\lambda_i$  groupes, deux racines d'un même groupe ne différant que par un nombre entier, toujours différent de zéro, et deux racines de deux groupes distincts ne différant jamais d'un nombre entier. Supposons de plus que, dans chacun de ces groupes, il n'y ait pas deux racines égales, et soient  $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \dots, m_{\lambda_i}^{(i)}$  les nombres respectifs de racines dans chacun d'eux.

Nous avons vu que les  $m_1^{(i)}$  intégrales correspondant aux racines du premier groupe contiendront des termes logarithmiques, à moins que les coefficients ne vérifient  $\frac{m_1^{(i)}(m_1^{(i)}+1)}{2}$  équations de condition, et de même pour chacun des autres groupes.

Si l'on applique ceci à tous les points critiques  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$  de l'équation (1), le nombre total des équations de condition sera

$$\sum_{i=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\lambda_i} \frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}+1)}{2} - 1;$$

car, en vertu de la relation (2), une des équations se trouve satisfaite identiquement. Pour que l'équation (1) soit complètement déterminée, il faudra donc que l'on ait

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\lambda_i} \frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}+1)}{2} - 1 = m \left[ \frac{(m+1)(\rho-2)}{2} + 1 \right];$$

à la relation (3) nous devons joindre aussi les relations évidentes

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\lambda_i} m_k^{(i)} = m \quad (i=1, 2, \dots, \rho).$$

4. Toute équation de la forme (1), qui est complètement déterminée par la forme de ses intégrales dans le voisinage des points critiques, correspond à un système de solutions en nombres entiers et positifs des équations (3) et (4). Nous sommes ainsi conduits à rechercher en premier lieu tous les systèmes de solutions de ces équations.

Je remarque d'abord qu'étant donnée une solution, on peut en déduire une autre en changeant  $\rho$  en  $\rho+1$  et en posant  $m_1^{\rho+1} = m$ ; cela

revient à supposer que l'équation (1) possède un point singulier de plus et que ce point est un point singulier apparent. Comme on peut répéter cette opération autant de fois qu'on le veut, on voit que de toute solution des équations (3) et (4), on peut en déduire une infinité. En d'autres termes, à toute équation de la forme (1) jouissant de la propriété voulue, il correspond une infinité d'équations linéaires jouissant de la même propriété et ayant un nombre quelconque de points singuliers apparents, outre les points critiques de la première. Inversement, si l'on connaît un système de solutions des équations (3) et (4), où un ou plusieurs des nombres  $m_k^i$  soient égaux à  $m$ , on peut en déduire un autre système de solutions où tous les nombres  $m_k^i$  seront inférieurs à  $m$ . On peut donc se borner à rechercher ces systèmes de solutions; chaque suite, telle que  $m_1^i, m_2^i, \dots, m_{\lambda_i}^i$  se composera au moins de deux nombres.

L'équation (3) peut s'écrire, en tenant compte des équations (4),

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} (m_k^{(i)})^2 + m\rho = 2 + m(\rho m + \rho - 2m),$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{i=\rho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} (m_k^{(i)})^2 = 2 + m^2(\rho - 2);$$

on peut encore la mettre sous la forme suivante :

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{i=\rho} \left[ m^2 - \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} (m_k^{(i)})^2 \right] = 2(m^2 - 1).$$

La somme  $\Sigma(m_k^i)^2$  aura sa plus grande valeur lorsque la suite des nombres  $m_1^i, m_2^i, \dots, m_{\lambda_i}^i$  se réduira à deux nombres, l'un égal à  $m - 1$ , l'autre à l'unité. On aura donc

$$\Sigma(m_k^i)^2 \leq m^2 - 2m + 2,$$

et le premier membre de l'équation (6) sera au moins égal à

$$2\rho(m - 1).$$

On aura, par conséquent,

$$2(m^2 - 1) \geq 2\rho(m - 1)$$

et, par suite,

$$\rho \leq m + 1.$$

Ainsi, pour une valeur donnée de  $m$ , le nombre des points critiques non apparents ne pourra dépasser  $m + 1$ . Si cette limite est atteinte, on aura pour chaque point singulier  $r_1^i = m - 1$ ,  $r_2^i = 1$ , c'est-à-dire que  $m - 1$  intégrales auront le même multiplicateur dans le domaine de chaque point critique. C'est à ce type que se rattachent les équations de M. Pochhammer (*Journal de Crelle*, t. 71), et nous verrons plus loin que toutes les équations du même type peuvent se ramener à celles-là.

On obtient encore une solution en prenant, quel que soit  $m$ ,

$$\rho = 3 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = \dots = m_m^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = \dots = m_m^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = m - 1, \quad m_2^{(3)} = 1. \end{cases}$$

C'est à cette solution que se rattachent les séries hypergéométriques d'ordre supérieur, et j'ai fait voir (*loc. cit.*, p. 412) que toute autre équation du même type pouvait se ramener à une équation hypergéométrique; mais il est clair que nous n'avons là que des solutions tout à fait particulières du problème.

L'équation (5), jointe à la condition  $\rho \leq m + 1$ , montre que, pour une valeur donnée de  $m$ , il n'y a qu'un nombre limité de systèmes de solutions, abstraction faite de ceux que l'on peut en déduire par le procédé indiqué plus haut. La recherche de ces solutions nous amène à considérer toutes les décompositions possibles en une somme de carrés du nombre entier  $2 + m^2(\rho - 2)$ , pourvu qu'elles soient compatibles avec les équations (4). Je laisse de côté pour le moment la discussion de ce système, et je me borne à reproduire les solutions pour  $m = 3$  et  $m = 4$ .

$$m = 3.$$

$$(I) \quad \rho = 3 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 2, \quad m_2^{(3)} = 1; \end{cases}$$

$$(II) \quad \rho = 4 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_1^{(2)} = m_1^{(3)} = m_1^{(4)} = 2, \\ m_2^{(1)} = m_2^{(2)} = m_2^{(3)} = m_2^{(4)} = 1. \end{cases}$$

$$m = 4.$$

$$(I) \quad \rho = 3 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = m_4^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = m_4^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 3, \quad m_2^{(3)} = 1; \end{cases}$$

$$(II) \quad \rho = 3 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = m_4^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 2, \quad m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = m_2^{(3)} = 2; \end{cases}$$

$$(III) \quad \rho = 3 \begin{cases} m_1^{(1)} = 2, \quad m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 2, \quad m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 2, \quad m_2^{(3)} = m_3^{(3)} = 1; \end{cases}$$

$$(IV) \quad \rho = 4 \begin{cases} m_1^{(1)} = 3, \quad m_2^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 3, \quad m_2^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 3, \quad m_2^{(3)} = 1, \\ m_1^{(4)} = m_2^{(4)} = m_3^{(4)} = m_4^{(4)} = 1; \end{cases}$$

$$(V) \quad \rho = 4 \begin{cases} m_1^{(1)} = 3, \quad m_2^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 3, \quad m_2^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = m_2^{(3)} = 2, \\ m_1^{(4)} = 2, \quad m_2^{(4)} = m_3^{(4)} = 1; \end{cases}$$

$$(VI) \quad \rho = 4 \begin{cases} m_1^{(1)} = 3 = m_2^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = 2, \\ m_1^{(3)} = m_2^{(3)} = 2, \\ m_1^{(4)} = m_2^{(4)} = 2; \end{cases}$$

$$(VII) \quad \rho = 5 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_1^{(2)} = m_1^{(3)} = m_1^{(4)} = m_1^{(5)} = 3, \\ m_2^{(1)} = m_2^{(2)} = m_2^{(3)} = m_2^{(4)} = m_2^{(5)} = 1. \end{cases}$$

5. Supposons connu un système de solutions des équations (3) et (4), et donnons-nous arbitrairement les points  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$  ainsi que les exposants de discontinuité, en supposant qu'on puisse les partager en groupes, comme il a été expliqué plus haut, et qu'ils vérifient la relation (2). Pour que l'équation (1) admette dans le domaine de chacun de ces points singuliers un système fondamental d'intégrales appartenant aux exposants choisis et ne contenant pas de logarithmes, les coefficients des polynômes  $F$  doivent satisfaire à des relations dont

le nombre est précisément égal au nombre de ces coefficients, de sorte que le problème est *déterminé*.

Il est aisé de voir que les coefficients des polynômes  $F$  seront donnés par des équations algébriques; mais la discussion de ces équations dans le cas général paraît très compliquée, au moins si l'on veut l'aborder par des méthodes directes. Dans ce qui suit, je considère un cas particulièrement intéressant, où les coefficients sont fournis par des équations linéaires dont la formation est très simple. Je démontre plus loin, du reste, que les autres cas ne sont pas essentiellement distincts de celui-là.

Admettons que les racines de chacun des groupes relatifs à l'un quelconque des points singuliers forment une progression arithmétique ayant pour raison l'unité telle que  $r, r+1, \dots, r+n-1$ . Cette hypothèse exclut, comme l'on voit, l'existence de points singuliers apparents pour l'équation (1), car une transformation telle que  $y = (x-a)^r u$  les ramènerait à des points ordinaires. Si la condition précédente est satisfaite pour tous les points singuliers de l'équation (1), y compris le point  $x = \infty$ , nous allons voir que la détermination des coefficients se fera au moyen d'équations du premier degré. Je m'appuierai pour cela sur le théorème suivant, que j'ai démontré dans le travail déjà cité (*Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. XII, p. 265).

*Pour qu'une équation différentielle linéaire d'ordre  $m$  admette une intégrale holomorphe dans le domaine du point  $a$ , la valeur de cette intégrale et de ses  $p-1$  premières dérivées pouvant être prises arbitrairement pour  $x = a$ , il faut et il suffit qu'elle soit de la forme*

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & (x-a)^{m-p} \frac{d^m y}{dx^m} + Q_1(x) (x-a)^{m-p-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots \\ & + (x-a) Q_{m-p+1}(x) \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} \\ & + Q_{m-p}(x) \frac{d^p y}{dx^p} + \dots + Q_m(x) y = 0, \end{aligned} \right.$$

$Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  étant des fonctions holomorphes de  $x$  dans le domaine du point  $a$ , et que l'équation

$\varphi(r) = (r-p)\dots(r-m+1) - Q_1(a)(r-p)\dots(r-m+2) - \dots - Q_{m-p}(a) = 0$   
n'admette pour racine aucun nombre entier positif supérieur à  $p-1$ .



Remarquons qu'une intégrale holomorphe dont la valeur est arbitraire, ainsi que celles de ses  $p - 1$  premières dérivées, pour  $x = a$ , équivaut en réalité à  $p$  intégrales holomorphes linéairement distinctes appartenant respectivement aux exposants  $0, 1, 2, \dots, p - 1$ . L'équation  $\varphi(r) = 0$  n'est autre chose que l'équation déterminante fondamentale relative au point  $x = a$  quand on a divisé le premier membre par le produit  $r(r - 1) \dots (r - p + 1)$ . La seconde condition sera donc satisfaite si cette équation n'admet pas d'autre racine entière.

Pour qu'une équation linéaire d'ordre  $m$  admette dans le domaine du point  $a$  une intégrale de la forme

$$(x - a)^r P(x - a),$$

où  $P(x - a)$  désigne une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de  $x - a$ , dont les  $p$  premiers coefficients sont arbitraires, il faudra qu'en faisant la transformation

$$y = (x - a)^r u,$$

l'équation en  $u$  soit de la même forme que l'équation (7). Cette condition sera suffisante pourvu que l'équation déterminante relative au point  $a$  n'ait pas d'autre racine faisant partie du groupe  $r, r + 1, \dots, r + p - 1$ . Si le point critique coïncide avec le point  $x = \frac{1}{x'} = \infty$ , on commencera par le ramener à l'origine en posant  $x = \frac{1}{t}$ .

6. Le problème de Riemann généralisé pourra alors être posé comme il suit. Considérons un système de  $m$  fonctions  $y_1, y_2, \dots, y_m$  d'une variable  $x$ , assujetties aux conditions suivantes :

1° Chacune de ces fonctions est holomorphe dans le voisinage de toute valeur de  $x$ , sauf dans le voisinage des points  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, \infty$  ;

2° Quand on fait décrire à la variable  $x$  un chemin fermé quelconque, ne passant par aucun des points critiques, les valeurs finales de nos fonctions sont liées aux valeurs initiales par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants ;

3° Dans le domaine du point singulier  $a_i (i = 1, 2, \dots, p)$  on a  $m$  branches linéairement indépendantes qui se partagent en  $\lambda_i$  groupes.

comprenant respectivement  $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \dots, m_{\lambda_i}^{(i)}$  fonctions. Les branches du  $k^{\text{ième}}$  groupe sont de la forme

$$y = (x - a_i)^{r_k^{(i)}} P_k(x - a_i),$$

où  $P_k(x - a_i)$  représente une série convergente ordonnée suivant les puissances positives et croissantes de  $x - a_i$ , les  $m_k^{(i)}$  premiers coefficients pouvant être pris arbitrairement; aucun des nombres  $r_k^{(i)} - r_k^{(i)}$  n'est un nombre entier. Dans cet énoncé on devra remplacer  $x - \infty$  par  $\frac{1}{x}$ .

4° Les nombres  $m_k^{(i)}$  vérifient les équations (3) et (4), et entre les exposants  $r_k^{(i)}$  on a la relation

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\lambda_i} \left[ m_k^{(i)} r_k^{(i)} + \frac{m_k^{(i)} (m_k^{(i)} - 1)}{2} \right] = \frac{m(m-1)(\rho-2)}{2}.$$

Il existe, en général, un système de fonctions  $y$  satisfaisant à ces conditions, et ce système est unique, en ne regardant pas comme distincts les systèmes obtenus en prenant des combinaisons linéaires et homogènes des premières fonctions.

Les fonctions  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , si elles existent, forment évidemment un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre  $m$  à coefficients rationnels de la forme (1). Cette équation ne pourra présenter comme points singuliers, outre les points  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ , que des points singuliers apparents. Supposons qu'elle admette  $q$  points singuliers apparents; la somme des racines des équations déterminantes relatives à ces points sera forcément supérieure à  $q \frac{m(m-1)}{2}$ .

En désignant par  $\Sigma R$  cette somme, on aura

$$(10) \quad \Sigma R > q \frac{m(m-1)}{2}.$$

La relation (2) nous donne alors

$$(11) \quad \Sigma R + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\lambda_i} \left[ m_k^{(i)} r_k^{(i)} + \frac{m_k^{(i)} (m_k^{(i)} - 1)}{2} \right] = \frac{m(m-1)(\rho+q-2)}{2},$$

relation incompatible avec la relation donnée (9) et l'inégalité (10). On aura donc  $q = 0$  et l'équation cherchée sera exactement de la forme (1).

Considérons d'abord un point singulier  $a_i$  à distance finie ; pour qu'il existe dans le domaine de ce point un groupe de  $m_k^{(i)}$  intégrales de la forme  $(x - a)^{r_k^{(i)}} P_k(x - a_i)$ , il faudra, comme on l'a vu tout à l'heure, qu'en posant  $y = (x - a_i)^{r_k^{(i)}} u$ , la nouvelle équation en  $u$  ait la forme (7), où  $p = m_k^{(i)}$ . Or, quand on fait cette transformation dans l'équation (1), on obtient une équation de même forme

$$(12) \quad \Phi^{(1)}(u) = [\psi(x)]^m \frac{d^m u}{dx^m} + [\psi(x)]^{m-1} F_{\rho-2}^{(1)}(x) \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \dots + F_{m(\rho-2)}^{(1)}(x) u = 0,$$

où  $F_{\rho-2}^{(1)}, F_{2\rho-2}^{(1)}, \dots, F_{m(\rho-2)}^{(1)}$  sont des polynômes entiers en  $x$  d'un degré marqué par leur indice, qui s'expriment linéairement au moyen des polynômes  $F_{\rho-2}, \dots, F_{m(\rho-2)}$  et de quantités connues. Il faudra donc que  $F_{m(\rho-2)}^{(1)}(x)$  soit divisible par  $(x - a_i)^{m_k^{(i)}}$ , le polynôme précédent par  $(x - a)^{m_k^{(i)}-1}$ , ... et enfin  $F_{m-m_k^{(i)}+1}^{(1)}$  par  $(x - a_i)$ . Il en résulte, pour les coefficients de l'équation (1), un nombre de relations égal à  $\frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}+1)}{2}$ , et ces relations sont *linéaires* par rapport aux coefficients inconnus.

Pour le point  $x = \frac{1}{x'} = \infty$ , on posera d'abord  $x = \frac{1}{t}$ ; les coefficients de l'équation en  $t$  sont des fonctions linéaires des coefficients de la première, et la conclusion s'applique encore à ce cas.

Ainsi, si les équations (3), (4) et (9) sont vérifiées par les nombres  $m_k^{(i)}$  et  $r_k^{(i)}$ , les coefficients inconnus de l'équation (1) seront déterminés par un système d'équations linéaires en nombre égal à celui de ces coefficients.

7. Nous pouvons conclure de là qu'en général le problème admettra une solution et une seule ; dans chaque cas particulier que l'on voudra étudier, on pourra effectuer le calcul des coefficients sans être jamais arrêté par la résolution d'une équation algébrique. Les seuls cas singuliers que l'on pourra rencontrer sont ceux qui se présentent normalement dans la résolution d'un système de  $n$  équations linéaires à un nombre égal d'inconnues. Il paraît évident, d'après la nature de la

question, qu'il ne pourra y avoir indétermination, au moins si on laisse aux paramètres restés arbitraires, tels que les  $a_i$  et les  $r_k^{(i)}$ , toute leur généralité. Mais il pourra y avoir incompatibilité. Je vais en donner un exemple, qui nous fournira en même temps une relation d'inégalité importante que doivent vérifier les nombres  $m_k^{(i)}$ . Soit  $M_i$  le plus grand des nombres  $m_1^{(i)}, \dots, m_{\lambda_i}^{(i)}$ , et  $M_1, M_2, \dots, M_\rho$  les nombres analogues pour les  $\rho$  points critiques. Supposons, ce que l'on peut toujours faire, qu'aucun de ces nombres n'est inférieur à  $M_\rho$  et posons

$$\pi = \sum_{i=1}^{i=\rho-1} M_i;$$

les équations précédentes seront incompatibles toutes les fois que  $\pi$  sera plus grand que  $m(\rho - 2)$ . En effet, par une transformation déjà employée plusieurs fois, on pourra supposer que l'équation (1) admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point  $x = a_i$ , la valeur de cette intégrale et de ses  $M_i - 1$  premières dérivées pouvant être prise arbitrairement pour  $x = a_i$ . Le coefficient de  $y$  devra donc être

divisible par le produit  $\prod_{i=1}^{i=\rho-1} (x - a_i)^{M_i}$ , c'est-à-dire par un polynôme

de degré  $\pi$ . Comme ce coefficient est de degré  $m(\rho - 2)$ , il sera identiquement nul. Il suit de là que l'équation déterminante relative au point  $\infty$  devra admettre une racine nulle au moins et, si cette condition est remplie, l'équation (1) ne sera pas complètement déterminée. C'est ainsi que, parmi les solutions données plus haut pour les équations (3) et (4) dans le cas où  $m = 4$ , on devra exclure la quatrième.

Si, pour un système de valeurs attribuées aux nombres  $m, \rho, m_k^{(i)}$ , les équations (3) et (4) sont vérifiées et si les équations linéaires qui déterminent les coefficients n'offrent ni incompatibilité ni indétermination, on aura un *type* d'équations linéaires d'ordre  $m$  ayant  $\rho$  points critiques, analogue à l'équation du second ordre qui admet pour intégrale la série hypergéométrique de Gauss. On aura dans ce type, comme paramètres arbitraires, les  $\rho - 1$  points critiques  $a_1, a_2, \dots, a_{\rho-1}$  et les exposants  $r_k^{(i)}$  assujettis à vérifier la relation (9); le nombre total de ces

paramètres sera donc

$$\rho - 1 + \sum_{i=1}^{i=\rho} \lambda_i - 1.$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $r'_1 = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, \rho - 1$ ), ce qui diminue le nombre des arbitraires de  $\rho + 1$  unités. Le nombre total des paramètres contenus dans ce type sera donc égal à

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \lambda_i - 3,$$

ou au nombre des groupes d'intégrales diminué de trois unités. Je remarque que les fonctions de M. Pochhammer et les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur sont des intégrales d'équations linéaires qui constituent des types particuliers de cette espèce. Pour chacun d'eux, le nombre des paramètres arbitraires est  $2m - 1$ .

8. Pour en finir avec les généralités, je démontrerai maintenant une propriété importante du groupe de ces équations. Supposons que l'on ait obtenu un type d'équations, tel que ceux que nous venons de définir, et laissons aux paramètres qui entrent dans cette équation toute leur généralité, de sorte que l'on pourra écarter toute relation algébrique ou transcendante qui ne serait pas une conséquence des conditions déjà établies. En particulier, nous écarterons les cas singuliers où l'équation ne serait pas irréductible. Cela posé, je dis que la recherche du groupe de l'équation se ramène à des calculs algébriques. Pour fixer les idées, supposons tous les points singuliers de l'équation à distance finie, de façon que l'intégrale générale soit uniforme et continue dans le domaine du point  $x = \infty$ . Dans le voisinage du point  $x = a_i$ , on a  $m$  intégrales linéairement distinctes  $\mathcal{Y}_1^{(i)}, \mathcal{Y}_2^{(i)}, \dots, \mathcal{Y}_m^{(i)}$  qui se partagent en  $\lambda_i$  groupes; les intégrales d'un même groupe sont multipliées par le facteur

$$\omega_k^{(i)} = e^{2\pi r_k^{(i)} \sqrt{-1}}$$

lorsque  $x$  décrit un lacet dans le sens direct autour du point  $x = a_i$ . Par chaque point critique menons une coupure s'étendant jusqu'à l'in-



eux-mêmes des  $(\rho - 1)m^2$  coefficients  $a, b, c, \dots, l$  et des coefficients  $\alpha_k^{(i)}$  des substitutions (14), qui sont arbitraires. Soit  $N$  le nombre de ces coefficients; on a immédiatement

$$N = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\lambda_i} (m_k^{(i)})^2.$$

On pourra disposer de ces  $N$  coefficients indéterminés, de façon à établir entre les coefficients  $A, B, C, \dots, L, N - 1$  relations algébriques arbitraires, pourvu, bien entendu, qu'elles ne soient pas incompatibles. [On ne peut prendre que  $N - 1$  relations et non pas  $N$ , à cause de l'homogénéité des formules (13), (14) et (15).] Par exemple, on pourra supposer que l'on a pris les  $\alpha_k^{(i)}$ , de façon que  $N - 1$  des coefficients  $A, B, C, \dots, L$ , aient des valeurs déterminées. D'une manière générale, quel que soit le système de relations que l'on adopte, les nouveaux coefficients  $A, B, C, \dots, L$  ne dépendront que de  $(\rho - 1)m^2 - N + 1$  paramètres inconnus. D'après la relation (5), ce nombre sera égal à

$$(\rho - 1)m^2 - 2 - m^2(\rho - 2) + 1 = m^2 - 1;$$

les formules (15) ainsi préparées ne contiendront plus que  $m^2 - 1$  inconnues. Pour trouver ces  $m^2 - 1$  inconnues, nous n'avons plus qu'à écrire que tout circuit enveloppant tous les points critiques ramène chaque intégrale à sa valeur initiale. On obtient ainsi  $m^2$  équations nouvelles qui se réduisent à  $m^2 - 1$  équations distinctes, en vertu de la relation (9); le nombre des équations nouvelles est précisément le même que celui des inconnues restantes. Il pourrait se faire que ces  $m^2 - 1$  équations fussent incompatibles; mais cela prouverait simplement qu'on a mal choisi les  $N - 1$  relations algébriques introduites plus haut, par exemple qu'on en a pris une incompatible avec les dernières. En définitive, on voit que l'on sera ramené à des calculs algébriques, et les seules quantités connues qui figurent dans le calcul sont les multiplicateurs  $\omega$ . Donc, *les coefficients des substitutions fondamentales du groupe de l'équation sont des fonctions algébriques des multiplicateurs.*

Dans le Mémoire déjà cité plusieurs fois sur les séries hypergéométriques d'ordre supérieur, j'ai déterminé le groupe par un procédé qui

peut être considéré comme une application de la méthode générale ci-dessus. D'un autre côté, M. Picard a obtenu le groupe de l'équation du troisième ordre de M. Pochhammer en partant de l'expression des intégrales au moyen d'intégrales définies (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1885), et sa méthode s'applique à l'équation générale de cette espèce. Dans ces deux cas, les coefficients des substitutions fondamentales du groupe sont des fonctions *rationnelles* des multiplicateurs. Il en est de même pour l'exemple que je traite plus loin comme application de la méthode qui vient d'être exposée. On est ainsi conduit à se demander si cette propriété ne serait pas générale. Il suffirait évidemment de faire voir que les coefficients des substitutions fondamentales sont des fonctions uniformes des multiplicateurs, quand on choisit convenablement le système fondamental d'intégrales. Je n'ai pu jusqu'ici le démontrer en toute rigueur.

9. Quoi qu'il en soit, on déduit de ce qui précède plusieurs conséquences dignes d'attention :

1° Quand on augmente ou qu'on diminue les nombres  $r_k^{(i)}$  de nombres entiers quelconques, sans changer les points critiques, les multiplicateurs  $\omega_k^{(i)}$  ne changent pas. Donc toutes les équations ainsi obtenues appartiennent à un nombre *fini* de classes.

2° Prenons une équation de la forme plus générale considérée aux nos 3 et 4. Tout ce qui a été dit sur le groupe s'applique mot pour mot à ces équations. Il sera donc possible, *en général*, de former une équation de la forme moins générale considérée du n° 5, ayant les mêmes points singuliers, les mêmes multiplicateurs et le même groupe. Ces deux équations seront par conséquent de la même classe, et l'intégrale générale de la première sera une fonction linéaire et homogène à coefficients rationnels de l'intégrale générale de la seconde et de ses  $m - 1$  premières dérivées.

3° Les considérations employées au numéro précédent permettent de se rendre compte bien aisément de la condition trouvée plus haut (n° 7)

$$\sum_{i=1}^{i=p-1} M_i \leq m(p-2).$$



Supposons, en effet, que le premier membre de cette inégalité soit supérieur à  $m(\rho - 2)$  et supposons  $\alpha_\rho = \infty$ ; parmi les intégrales  $y_1^{(i)}$ ,  $y_2^{(i)}$ , ...,  $y_m^{(i)}$  que nous avons considérées, il en existera plus de  $m(\rho - 2)$  qui auront un multiplicateur égal à l'unité dans le domaine du point critique correspondant; il en existera donc moins de  $m$  ayant un multiplicateur différent de l'unité. Cela posé, soit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  un système fondamental quelconque. Dans le voisinage du point critique  $\alpha_i$ , on aura des relations de la forme

$$Y_k = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \alpha_{k,\mu} y_\mu^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Pour que l'intégrale

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \dots + \lambda_m Y_m$$

soit uniforme dans le domaine du point critique  $\alpha_i$ , il faudra que le coefficient de toute intégrale non uniforme  $y_\mu^{(i)}$  soit nul dans le second membre. Si l'on veut de même que l'intégrale précédente soit uniforme dans le voisinage de tous les points critiques à distance finie, on a, pour déterminer  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , un système d'équations linéaires et homogènes, comprenant au plus  $m - 1$  équations. Il sera donc possible de satisfaire à ces équations par des valeurs de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  qui ne seront pas toutes nulles, et l'équation différentielle admettrait une intégrale uniforme dans toute l'étendue du plan et différente de zéro; d'où l'on déduit la même conclusion que plus haut.

10. Les deux types d'équations du troisième ordre correspondant aux deux solutions trouvées plus haut sont déjà connus. Des sept solutions que l'on a trouvées plus haut pour  $m = 4$ , on a déjà vu que la quatrième devait être écartée. Les types correspondant à la première, à la cinquième et à la septième solution sont connus. La première solution donne une équation hypergéométrique du quatrième ordre, la septième fournit l'équation de M. Pochhammer pour  $m = 4$ . Enfin, à la cinquième correspond une équation que j'ai déjà signalée antérieurement (*Comptes rendus*, 1882) et à laquelle se rattachent les séries hypergéométriques de deux variables  $F_2$  et  $F_3$  de M. Appell. Il reste à examiner la deuxième, la troisième et la sixième solution.

Je considère d'abord la deuxième solution. L'équation différentielle correspondante aura les points singuliers 0, 1,  $\infty$  avec les exposants de discontinuité ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } x=0 & \dots\dots\dots 0, \quad 1, \quad 1-b_1, \quad 1-b_2, \\ \text{» } x=1 & \dots\dots\dots 0, \quad 1, \quad R, \quad R+1, \\ \text{» } x=\frac{1}{x'}=\infty & \dots\dots\dots a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4. \end{array}$$

On a

$$R = \frac{1+b_1+b_2-a_1-a_2-a_3-a_4}{2},$$

et l'on suppose qu'aucun des nombres  $b_1, b_2, b_1-b_2, R, a_1-a_2, a_1-a_3, \dots$  n'est égal à un nombre entier. Cette équation sera de la forme

$$(16) \quad \begin{cases} x^2(x-1)^2 y^{iv} + (Ax-B)x(x-1)y''' \\ + (Cx^2-Dx+E)y'' + (Fx-G)y' + Hy = 0. \end{cases}$$

On détermine immédiatement les coefficients A, B, C, E, F, H en écrivant que les équations déterminantes pour  $x=0$  et pour  $x=\infty$  ont les valeurs précédentes. On trouve ainsi

$$\begin{array}{ll} A=6+a_1+a_2+a_3+a_4, & C=7+3\Sigma a_1+\Sigma a_1 a_2, \\ F=1+\Sigma a_1+\Sigma a_1 a_2+\Sigma a_1 a_2 a_3, & H=a_1 a_2 a_3 a_4, \\ B=3+b_1+b_2, & E=1+b_1+b_2+b_1 b_2, \end{array}$$

Pour trouver les deux autres coefficients D et G, nous n'avons qu'à faire la transformation

$$y = (x-1)^R z;$$

l'équation en  $z$  sera

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2(x-1)^4 z^{iv} + [4Rx + Ax - B]x(x-1)^3 z''' \\ + [6R(R-1)x^2 + 3R(Ax-B)x + Cx^2 - Dx + E](x-1)^2 z'' \\ + \left[ 4R(R-1)(R-2)x^2 + 3R(R-1)(Ax-B)x \right. \\ \quad \left. + 2R(Cx^2 - Dx + E) + (Fx-G)(x-1) \right](x-1) z' \\ + \left[ R(R-1)(R-2)(R-3)x^2 + R(R-1)(R-2)(Ax-B)x \right. \\ \quad \left. + R(R-1)(Cx^2 - Dx + E) + R(Fx-G)(x-1) + H(x-1)^2 \right] z = 0. \end{array} \right.$$

Le coefficient de  $z'$  devra être divisible par  $x-1$  et celui de  $z$  par

$(x-1)^2$ , ce qui fournit les trois relations

$$\begin{aligned} (R-2)(R-3) + (R-2)(A-B) + C - D + E &= 0, \\ 2(R-1)(R-2)(R-3) + (R-1)(R-2)(2A-B) + (R-1)(2C-D) + F - G &= 0, \\ 4(R-1)(R-2) + 3(R-1)(A-B) + 2(C-D+E) &= 0. \end{aligned}$$

De la première, on tire

$$D = E + C + (R-2)(R-3) + (R-2)(A-B)$$

ou, en remarquant que  $R = \frac{4+B-A}{2}$ ,

$$D = E + C - (R-1)(R-2),$$

et cette valeur de D vérifie aussi la troisième équation. De la deuxième, on tire

$$G = F + (R-1)(R-2)(A-B) + (R-1)(2C-D).$$

Si l'on suppose  $b_1 = \frac{1}{3}$ ,  $b_2 = \frac{2}{3}$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ , on aura  $R = \frac{1}{2}$ , et les coefficients auront les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 7, & B &= 4, & E &= \frac{20}{9}, & C &= 7 + 3 \sum a_1 + \sum a_1 a_2, \\ F &= 1 + \sum a_1 + \sum a_1 a_2 + \sum a_1 a_2 a_3, & H &= a_1 a_2 a_3 a_4, \\ D &= C + \frac{53}{36}, & G &= F - \frac{C}{2} + \frac{353}{72}. \end{aligned}$$

L'équation ainsi obtenue, qui n'est qu'un cas très particulier de la précédente, puisqu'elle ne contient que trois paramètres arbitraires au lieu de six, avait déjà été rencontrée par M. Brioschi dans ses recherches sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques (*Annali di Matematica*, 2<sup>e</sup> série, t. XII, p. 65; *Mathematische Annalen*, Band 26, p. 108).

Dans le domaine du point  $x = 0$ , l'équation (16) admet deux intégrales distinctes holomorphes. En cherchant une série

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$$

satisfaisant formellement à cette équation, on est conduit à une relation de récurrence entre trois coefficients consécutifs

$$(18) \quad \begin{cases} (n+1)(n+2)[n(n-1) + Bn + E]C_{n+2} \\ - (n+1)[2n(n-1)(n-2) + (A+B)n(n-1) + Dn + G]C_{n+1} \\ + [n(n-1)(n-2)(n-3) + An(n-1)(n-2) + Cn(n-1) + Fn + H]C_n = 0. \end{cases}$$

Cette relation détermine tous les coefficients successifs en fonction des deux premiers  $C_0$  et  $C_1$  qui restent arbitraires. Je désignerai cette série par

$$\tilde{\mathcal{F}}(C_0, C_1, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x),$$

et je poserai

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}(1, 0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) &= \tilde{\mathcal{F}}_1(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x), \\ \tilde{\mathcal{F}}(0, 1, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) &= \tilde{\mathcal{F}}_2(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x),\end{aligned}$$

Si, dans l'équation (16), on fait la transformation

$$y = (x - 1)^R z,$$

l'équation en  $z$  sera de la même forme que la première; les quantités  $a_1, a_2, a_3, a_4$  seront remplacées respectivement par  $a_1 + R, a_2 + R, a_3 + R, a_4 + R$ .

L'équation (16) admet donc aussi les deux intégrales

$$\begin{aligned}(1 - x)^R \tilde{\mathcal{F}}_1(a_1 + R, a_2 + R, a_3 + R, a_4 + R, b_1, b_2, x), \\ (1 - x)^R \tilde{\mathcal{F}}_2(a_1 + R, a_2 + R, a_3 + R, a_4 + R, b_1, b_2, x).\end{aligned}$$

Comme l'équation (16) n'admet que deux intégrales holomorphes distinctes dans le domaine du point  $x = 0$ , on aura des relations de la forme

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_1(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) &= C_1(1 - x)^R \tilde{\mathcal{F}}_1(a_1 + R, a_2 + R, a_3 + R, a_4 + R, b_1, b_2, x) \\ &\quad + C_2(1 - x)^R \tilde{\mathcal{F}}_2(a_1 + R, a_2 + R, a_3 + R, a_4 + R, b_1, b_2, x), \\ \tilde{\mathcal{F}}_2(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) &= C_3(1 - x)^R \tilde{\mathcal{F}}_1(a_1 + R, a_2 + R, a_3 + R, a_4 + R, b_1, b_2, x) \\ &\quad + C_4(1 - x)^R \tilde{\mathcal{F}}_2(a_1 + R, a_2 + R, a_3 + R, a_4 + R, b_1, b_2, x).\end{aligned}$$

On trouve bien facilement qu'il faut prendre

$$C_1 = 1, \quad C_2 = R, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1.$$

11. Pour montrer que la méthode précédente pour trouver le groupe n'est point impraticable, je vais l'appliquer à cette équation, en me bornant d'ailleurs au cas général où on la suppose irréductible.

Soient  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  les quatre intégrales linéairement indépendantes qui se comportent d'une manière simple dans le domaine du point  $x = 0$ , de telle sorte qu'en désignant par  $(y)_a$  ce que devient  $y$

quand on fait décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point  $x = a$ , on ait

$$(\varphi_1)_0 = \varphi_1, \quad (\varphi_2)_0 = \varphi_2, \quad (\varphi_3)_0 = \omega_1 \varphi_3, \quad (\varphi_4)_0 = \omega_2 \varphi_4,$$

où

$$\omega_1 = e^{2\pi\sqrt{-1}(1-b_1)}, \quad \omega_2 = e^{2\pi\sqrt{-1}(1-b_2)}.$$

Soient de même  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  les quatre intégrales linéairement indépendantes qui se comportent d'une manière simple dans le voisinage du point  $x = 1$ , de telle sorte qu'on ait

$$(\psi_1)_1 = \psi_1, \quad (\psi_2)_1 = \psi_2, \quad (\psi_3)_1 = \Omega \psi_3, \quad (\psi_4)_1 = \Omega \psi_4,$$

où

$$\Omega = e^{2\pi\sqrt{-1}R}.$$

Considérons les lignes droites indéfinies  $-\infty \dots 0, +1 \dots +\infty$  comme des coupures; les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  deviennent uniformes dans toute l'étendue du plan, et l'on a entre ces intégrales des relations de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \alpha_1 \psi_1 + \beta_1 \psi_2 + \gamma_1 \psi_3 + \delta_1 \psi_4, \\ \varphi_2 = \alpha_2 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \gamma_2 \psi_3 + \delta_2 \psi_4, \\ \varphi_3 = \alpha_3 \psi_1 + \beta_3 \psi_2 + \gamma_3 \psi_3 + \delta_3 \psi_4, \\ \varphi_4 = \alpha_4 \psi_1 + \beta_4 \psi_2 + \gamma_4 \psi_3 + \delta_4 \psi_4, \end{cases}$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme suivante :

$$(20) \quad \begin{cases} \psi_1 = \alpha'_1 \varphi_1 + \beta'_1 \varphi_2 + \gamma'_1 \varphi_3 + \delta'_1 \varphi_4, \\ \psi_2 = \alpha'_2 \varphi_1 + \beta'_2 \varphi_2 + \gamma'_2 \varphi_3 + \delta'_2 \varphi_4, \\ \psi_3 = \alpha'_3 \varphi_1 + \beta'_3 \varphi_2 + \gamma'_3 \varphi_3 + \delta'_3 \varphi_4, \\ \psi_4 = \alpha'_4 \varphi_1 + \beta'_4 \varphi_2 + \gamma'_4 \varphi_3 + \delta'_4 \varphi_4. \end{cases}$$

Nous pouvons prendre, pour former un système fondamental, les quatre intégrales  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ . S'il existait, en effet, entre ces quatre intégrales une relation linéaire, telle que

$$A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\psi_1 + D\psi_2 = 0,$$

l'intégrale

$$\Phi = A\varphi_1 + B\varphi_2 = -(C\psi_1 + D\psi_2)$$

serait uniforme dans toute l'étendue du plan et l'équation (16) ne serait pas irréductible, contrairement à l'hypothèse. On voit immédiate-

ment, pour la même raison, que  $\gamma'_1 \delta'_2 - \gamma'_2 \delta'_1$  ne peut être nul. Les équations (20) donnent alors

$$\begin{aligned}\delta'_2 \psi_1 - \delta'_1 \psi_2 &= (\alpha'_1 \delta'_2 - \alpha'_2 \delta'_1) \varphi_1 + (\beta'_1 \delta'_2 - \beta'_2 \delta'_1) \varphi_2 + (\gamma'_1 \delta'_2 - \gamma'_2 \delta'_1) \varphi_3, \\ \gamma'_2 \psi_1 - \gamma'_1 \psi_2 &= (\alpha'_1 \gamma'_2 - \alpha'_2 \gamma'_1) \varphi_1 + (\beta'_1 \gamma'_2 - \beta'_2 \gamma'_1) \varphi_2 + (\delta'_1 \gamma'_2 - \delta'_2 \gamma'_1) \varphi_3.\end{aligned}$$

Les intégrales  $\delta'_2 \psi_1 - \delta'_1 \psi_2$ ,  $\gamma'_2 \psi_1 - \gamma'_1 \psi_2$  sont holomorphes dans le domaine du point  $x = 1$  et linéairement indépendantes. On peut donc supposer qu'on a pris pour  $\psi_1$  et  $\psi_2$  ces intégrales elles-mêmes, et l'on peut de même remplacer  $(\gamma'_1 \delta'_2 - \gamma'_2 \delta'_1) \varphi_3$  par  $\varphi_3$  et  $(\delta'_1 \gamma'_2 - \delta'_2 \gamma'_1) \varphi_3$  par  $\varphi_4$ . Les deux premières des relations (20) peuvent alors s'écrire

$$(21) \quad \begin{cases} \psi_1 = A \varphi_1 + B \varphi_2 + \varphi_3, \\ \psi_2 = C \varphi_1 + D \varphi_2 + \varphi_4, \end{cases}$$

sans que cette substitution ait changé la forme des relations (19). On voit de même que le déterminant  $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$  est différent de zéro, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\beta_2 \varphi_1 - \beta_1 \varphi_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} &= \psi_1 + \frac{(\gamma_1 \beta_2 - \gamma_2 \beta_1) \psi_3 + (\delta_1 \beta_2 - \delta_2 \beta_1) \psi_4}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}, \\ \frac{\alpha_2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2} &= \psi_2 + \frac{(\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) \psi_3 + (\delta_1 \alpha_2 - \delta_2 \alpha_1) \psi_4}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2};\end{aligned}$$

les intégrales  $\frac{\beta_2 \varphi_1 - \beta_1 \varphi_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$ ,  $\frac{\alpha_2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}$  sont distinctes et holomorphes pour  $x = 0$ . On peut donc supposer qu'on les a prises pour les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  elles-mêmes, ce qui ne change pas la forme des relations (21), et l'on aura

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \psi_1 + A' \psi_3 + B' \psi_4, \\ \varphi_2 &= \psi_2 + C' \psi_3 + D' \psi_4.\end{aligned}$$

On voit de la même façon que  $A'D' - B'C'$  ne pourra être nul; les deux intégrales  $A' \psi_3 + B' \psi_4$ ,  $C' \psi_3 + D' \psi_4$  seront distinctes et auront le même multiplicateur  $\Omega$  dans le domaine du point  $x = 1$ . On peut donc supposer qu'on les a prises pour  $\psi_3$  et  $\psi_4$  et les équations précédentes s'écriront

$$(22) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \psi_1 + \psi_3, \\ \varphi_2 = \psi_2 + \psi_4. \end{cases}$$

En définitive, en choisissant convenablement les intégrales, les relations linéaires entre ces intégrales seront données par des formules de la forme (21) et (22). Il est facile de voir qu'aucun des coefficients B et C ne peut être nul, toujours en supposant l'équation irréductible. Si l'on avait, par exemple,  $B = 0$ , les relations

$$\psi_1 = A\varphi_1 + \varphi_3, \quad \varphi_1 = \psi_1 + \psi_3$$

montrent que  $\psi_1$  et  $\psi_3$  formeraient un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes. On pourra alors supposer  $B = 1$ ; il n'y a pour cela qu'à changer  $\varphi_1, \psi_1, \varphi_3, \psi_3$  en  $B\varphi_1, B\psi_1, B\varphi_3, B\psi_3$  respectivement.

Cela posé, il est facile d'avoir les substitutions fondamentales du groupe de l'équation. En effet, lorsque la variable  $x$  décrit un lacet dans le sens direct autour du point  $x = 1$ , on a

$$(\varphi_1)_1 = (\psi_1)_1 + (\psi_3)_1 = \psi_1 + \Omega\psi_3 = \psi_1 + \Omega(\varphi_1 - \psi_1) = \Omega\varphi_1 + (1 - \Omega)\psi_1.$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_1 &= \Omega\varphi_2 + (1 - \Omega)\psi_2, \\ (\psi_1)_0 &= \omega_1\psi_1 + (1 - \omega_1)(A\varphi_1 + B\varphi_2), \\ (\psi_2)_0 &= \omega_2\psi_2 + (1 - \omega_2)(C\varphi_1 + D\varphi_2), \end{aligned}$$

de sorte que les substitutions fondamentales sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_0 \left\{ \begin{aligned} &(\varphi_1)_0 = \varphi_1, \\ &(\varphi_2)_0 = \varphi_2, \\ &(\psi_1)_0 = \omega_1\psi_1 + (1 - \omega_1)(A\varphi_1 + B\varphi_2), \\ &(\psi_2)_0 = \omega_2\psi_2 + (1 - \omega_2)(C\varphi_1 + D\varphi_2); \end{aligned} \right. \\ \sum_1 \left\{ \begin{aligned} &(\varphi_1)_1 = \Omega\varphi_1 + (1 - \Omega)\psi_1, \\ &(\varphi_2)_1 = \Omega\varphi_2 + (1 - \Omega)\psi_2, \\ &(\psi_1)_1 = \psi_1, \\ &(\psi_2)_1 = \psi_2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Pour que le groupe soit complètement déterminé, il nous suffit de connaître les coefficients A, B, C, D. Pour trouver ces coefficients, considérons la substitution auxiliaire  $\Sigma, \Sigma_0$ ; c'est celle que subissent les quatre intégrales lorsque la variable décrit dans le sens direct un con-

tour fermé, renfermant à son intérieur les points 0 et 1. On trouve immédiatement qu'après un pareil chemin l'intégrale

$$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\psi_1 + \rho\psi_2,$$

où  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  sont des constantes quelconques, se change en la nouvelle intégrale

$$\begin{aligned} & [\lambda\Omega + \lambda(1-\Omega)(1-\omega_1)A + \nu(1-\omega_1)A + \mu(1-\Omega)(1-\omega_2)C + \rho(1-\omega_2)C]\varphi_1 \\ & + [\mu\Omega + \lambda(1-\Omega)(1-\omega_1)B + \nu(1-\omega_1)B + \mu(1-\Omega)(1-\omega_2)D + \rho(1-\omega_2)D]\varphi_2 \\ & + [\lambda(1-\Omega) + \nu]\omega_1\psi_1 + [\mu(1-\Omega) + \rho]\omega_2\psi_2. \end{aligned}$$

Cherchons à déterminer  $\lambda, \mu, \nu, \rho$ , de façon que l'intégrale considérée se reproduise, à un facteur constant près S, lorsque la variable décrit le contour précédent. On aura les quatre équations

$$\begin{aligned} & \lambda[\Omega - S + (1-\Omega)(1-\omega_1)A] + \mu(1-\Omega)(1-\omega_2)C \\ & \quad + \nu(1-\omega_1)A + \rho(1-\omega_2)C = 0, \\ & \lambda(1-\Omega)(1-\omega_1)B + \mu[\Omega - S + (1-\Omega)(1-\omega_2)D] + \nu(1-\omega_1)B + \rho(1-\omega_2)D = 0, \\ & \lambda(1-\Omega)\omega_1 + \nu(\omega_1 - S) = 0, \\ & \mu(1-\Omega)\omega_2 + \rho(\omega_2 - S) = 0. \end{aligned}$$

L'élimination de  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  conduit, après quelques réductions faciles, à l'équation suivante pour déterminer S :

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} f(S) &= (\Omega - S)^2(\omega_1 - S)(\omega_2 - S) \\ &\quad + (\Omega - S)(1 - \Omega)S(\omega_1 - S)(1 - \omega_2)D \\ &\quad + (1 - \Omega)^2S^2(\omega_1 - 1)(\omega_2 - 1)(AD - BC) \\ &\quad + (1 - \Omega)S(\omega_2 - S)(\Omega - S)(\omega_1 - 1)A = 0. \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, cette équation doit admettre pour racines les quantités  $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4$ ,

$$\omega'_1 = e^{-i\pi a\sqrt{-1}}, \quad \omega'_2 = e^{-i\pi a\sqrt{-1}}, \quad \omega'_3 = e^{-i\pi a\sqrt{-1}}, \quad \omega'_4 = e^{-i\pi a\sqrt{-1}},$$

et l'on aura identiquement

$$(24) \quad f(S) = (S - \omega'_1)(S - \omega'_2)(S - \omega'_3)(S - \omega'_4).$$



En égalant les termes constants des deux membres, on parvient à la relation

$$\omega_1 \omega_2 \Omega^2 = \omega'_1 \omega'_2 \omega'_3 \omega'_4,$$

qui est satisfaite, comme on le voit, en remplaçant les lettres  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\Omega$  par leurs valeurs. Si, dans l'identité (24), on fait successivement  $S = \Omega$ ,  $S = \omega_1$ ,  $S = \omega_2$ , on a les trois équations

$$\begin{aligned} (\Omega - \omega'_1)(\Omega - \omega'_2)(\Omega - \omega'_3)(\Omega - \omega'_4) &= \Omega^2(1 - \Omega)^2(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)(AD - BC), \\ (\omega_1 - \omega'_1)(\omega_1 - \omega'_2)(\omega_1 - \omega'_3)(\omega_1 - \omega'_4) \\ &= \omega_1^2(1 - \Omega)^2(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)(AD - BC) + \omega_1(1 - \Omega)(\omega_2 - \omega_1)(\Omega - \omega_1)(1 - \omega_1)A, \\ (\omega_2 - \omega'_1)(\omega_2 - \omega'_2)(\omega_2 - \omega'_3)(\omega_2 - \omega'_4) \\ &= \omega_2^2(1 - \Omega)^2(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)(AD - BC) + \omega_2(1 - \Omega)(\omega_1 - \omega_2)(\Omega - \omega_2)(1 - \omega_2)D. \end{aligned}$$

On en tire  $A$ ,  $D$ ,  $AD - BC$  et par suite  $BC$ . Nous avons vu que l'un des coefficients  $B$  ou  $C$  pouvait être pris à volonté ; si l'on prend par exemple  $B = 1$ , on aura  $C$ , et les substitutions fondamentales  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  seront complètement déterminées. Les coefficients sont bien, comme on voit, des fonctions *rationnelles* des multiplicateurs.

12. Si l'on augmente les nombres  $a$  et  $b$  de nombres entiers quelconques, les multiplicateurs  $\omega$ ,  $\omega'$  ne changent pas, tandis que  $\Omega$  peut changer de signe simplement. On en déduit que toutes les équations du type (16), ainsi obtenues, appartiennent à *deux* classes distinctes. Les cas où l'équation (16) n'est pas irréductible donnent lieu à une discussion plus compliquée. Il faut tenir compte, non seulement des multiplicateurs, mais des valeurs elles-mêmes des exposants de discontinuité.

Les substitutions fondamentales du groupe de l'équation, ramenées à leur forme canonique, sont de la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_0(y_1, y_2, y_3, y_4; y_1, y_2, \omega_1 y_3, \omega_2 y_4), \\ \Sigma_1(y_1, y_2, y_3, y_4; y_1, y_2, \Omega y_3, \Omega y_4). \end{aligned}$$

Inversement, à tout groupe dérivé de deux substitutions de cette forme on pourra faire correspondre en général une infinité d'équations de la forme (16). En particulier, si ce groupe est fini, on aura

une infinité d'équations de ce type dont l'intégrale générale s'exprimera au moyen de fonctions algébriques.

13. Le second type d'équations aura les trois points singuliers 0, 1,  $\infty$ , avec les exposants de discontinuité ci-après :

$$\begin{array}{lll} 0, & 1, & \alpha, \alpha' \text{ pour } x=0, \\ 0, & 1, & \beta, \beta' \text{ pour } x=1, \\ \Gamma, & \Gamma+1, & \gamma, \gamma' \text{ pour } x=\infty. \end{array}$$

On suppose qu'aucun des nombres  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \alpha - \alpha', \beta - \beta', \Gamma - \gamma, \Gamma - \gamma', \gamma - \gamma'$  n'est un nombre entier et l'on a de plus la relation

$$2\Gamma + \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 3.$$

L'équation sera de la forme

$$(25) \quad \begin{cases} x^2(x-1)^2 y'' + (Ax - B)x(x-1)y' \\ + (Cx^2 - Dx + E)y'' + (Fx - G)y' + Hy = 0. \end{cases}$$

On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} B &= 5 - \alpha - \alpha', \\ E &= 4 - 2\alpha - 2\alpha' + \alpha\alpha', \\ A - B &= 5 - \beta - \beta', \\ C - D + E &= 4 - 2\beta - 2\beta' + \beta\beta', \\ A &= 10 - (\alpha + \alpha' + \beta + \beta'), \\ C &= 3A - 11 + \gamma\gamma' + (\gamma + \gamma')(2\Gamma + 1) + \Gamma(\Gamma + 1), \\ F &= 2A - C - 6 + \gamma\gamma'(2\Gamma + 1) + (\gamma + \gamma')\Gamma(\Gamma + 1), \\ H &= \gamma\gamma'\Gamma(\Gamma + 1). \end{aligned}$$

Pour déterminer G, nous écrirons que, lorsqu'on substitue à la place de  $y$  une série de la forme

$$y = x^{-\Gamma} \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \right),$$

les coefficients de  $a_0$  et de  $a_1$  sont identiquement nuls. On trouve ainsi

$$\Gamma(\Gamma + 1)(\Gamma + 2)(A - B) - \Gamma(\Gamma + 1)(2C - D) + \Gamma(2\Gamma - G) - H = 0;$$

d'où l'on déduira G. Remarquons qu'en remplaçant H par sa valeur le facteur commun  $\Gamma$  disparaîtra, de sorte que l'on pourra toujours en déduire G.

La dernière équation du quatrième ordre, qu'il nous reste à former, sera de la forme

$$(26) \quad \begin{cases} x(x-1)^2(x-a)^2 y^{(4)} + (Ax^2 + Bx + C)x(x-1)y''' \\ + (Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)y'' + (Hx^2 + Kx + L)y' + (Mx + N)y = 0. \end{cases}$$

Les exposants de discontinuité seront respectivement

$$\begin{aligned} 0, \quad 1, \quad 2, \quad \gamma & \text{ pour } x=0, \\ 0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha+1 & \text{ » } x=1, \quad \delta, \quad \delta+1, \quad \delta', \quad \delta'+1 & \text{ pour } x=\infty. \\ 0, \quad 1, \quad \beta, \quad \beta+1 & \text{ » } x=a, \end{aligned}$$

On suppose qu'aucun des nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta - \delta'$  n'est égal à un nombre entier et que l'on a la relation

$$2\alpha + 2\beta + \gamma + 2\delta + 2\delta' = 1.$$

Les coefficients A, B, C, ... se déterminent de la même manière que plus haut, mais leurs expressions sont de plus en plus compliquées.

14. La recherche des solutions convenables des équations (4) et (5) peut se formuler ainsi : « Former un Tableau rectangulaire de  $m$  colonnes horizontales et de  $\rho$  lignes verticales, dont tous les éléments soient des nombres entiers positifs ou nuls, de telle façon que la somme des éléments de chaque ligne soit égale à  $m$  et que la somme des carrés de tous les éléments soit égale à  $2 + m^2(\rho - 2)$ . »

Le problème peut se décomposer en deux autres. Remarquons que la somme des carrés des éléments d'une même ligne ne pourra dépasser, d'après une remarque déjà faite,  $m^2 - 2m + 2$ . Supposons que la somme des éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne soit égale à  $m^2 - 2m + 2 - \alpha_i$ . Les nombres  $\alpha_i$  devront vérifier l'équation

$$\sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i = 2(m-1)(m+1-\rho).$$

Connaissant les solutions de cette équation, que l'on trouve immé-

diatement, on sera ramené à chercher les solutions en nombres entiers et positifs ou nuls de plusieurs systèmes indépendants d'équations de la forme

$$\sum_{h=1}^{h=m} X_h = m, \quad \sum_{h=1}^{h=m} X_h^2 = M.$$

Si l'on veut former tous les systèmes de solutions correspondant à une valeur de  $m$ , il paraît commode de former d'abord toutes les partitions de  $m$  et la somme des carrés correspondant à chacune d'elles. Une fois ce tableau formé, une simple inspection donnera facilement toutes les solutions convenables.

---

SUR LE

# CHANGEMENT DE VARIABLES,

PAR M. E. MARCHAND,  
PROFESSEUR AU LYCÉE DE CARCASSONNE.

---

On peut reprocher, à juste titre, à la formule de Taylor de ne conduire simplement au développement en série que dans quelques cas particuliers qu'il est aussi facile de traiter directement. Cela ne diminue nullement son importance, la valeur d'une formule générale consistant plutôt à montrer que tel problème est résoluble qu'à le résoudre effectivement avec le minimum de calculs algébriques ou de constructions géométriques.

L'utilité théorique de la série de Taylor est trop évidente pour qu'il soit nécessaire de s'attacher à la faire ressortir. Lagrange a montré pleinement tout le parti qu'on peut tirer du « développement d'une fonction d'une variable lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable ». Quoique sa démonstration de la « loi générale de ce développement » soit reconnue insuffisante, il n'en est pas moins vrai que, grâce aux travaux de Cauchy et de ses successeurs, les propriétés des séries entières et l'aptitude des fonctions analytiques à se prêter à un pareil développement servent de base à la théorie moderne des fonctions. Il est inutile de rappeler que les propriétés si importantes du contact et de la courbure dans les courbes et les surfaces peuvent être considérées comme de simples applications géométriques de la série de Taylor.

Hoëné Wronski, le philosophe qui découvrait le *Principe absolu du*

savoir et la *Loi de création* <sup>(1)</sup>, appréciait en ces termes la série de Lagrange qu'il faisait rentrer comme cas particulier dans son *Problème universel* <sup>(2)</sup>: « Cette loi est pour Lagrange ce que sont le binôme de Newton et le théorème de Taylor pour leurs auteurs respectifs <sup>(3)</sup>. »

L'auteur de la *Philosophie absolue* <sup>(4)</sup> se devait à lui-même d'obtenir la loi qui embrasse toutes les autres lois des séries comme un cas très particulier de la *Loi suprême de la Science des nombres* <sup>(5)</sup>, à propos de laquelle Lagrange, dans le compte rendu, conjointement avec Lacroix, du premier Mémoire présenté par Wronski à l'Institut, a signé cette décisive déclaration: « Ce qui a frappé vos Commissaires dans le Mémoire de M. Wronski, c'est qu'il tire de sa formule toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions, et qu'elles n'en sont que des cas très particuliers <sup>(6)</sup>. » La loi générale des séries conduit facilement à la série de Taylor, puisque « le cas en quelque sorte primitif de la loi fondamentale des séries est celui où l'accroissement est indéfiniment petit et lorsque, par conséquent, les différences deviennent des différentielles <sup>(7)</sup> ».

Il m'a paru intéressant de constater que l'expression des coefficients de la série de Taylor obtenue dans cet ordre d'idées par Wronski, dès 1812, en laissant indéterminée la variable indépendante, n'est autre chose que la formule générale relative au changement de cette variable.

Ordinairement on se borne à indiquer le moyen de former les dérivées successives  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , ... par un calcul de proche en proche

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx \frac{d^2y}{dx^2} - dy \frac{d^2x}{dx^2}}{dx^3}, \dots$$

<sup>(1)</sup> *Encyclopédie mathématique ou exposition complète de toutes les branches des Mathématiques, d'après les principes de la philosophie des Mathématiques de Hoëné Wronski*, par A. S. de Montferrier. Amyot, éditeur, t. III, p. 482.

Cet Ouvrage ayant été la cause occasionnelle de ce travail, je me bornerai dorénavant à le désigner par les abréviations suivantes: A. S.

<sup>(2)</sup> A. S., t. III, p. 401. M. Cayley a donné une nouvelle démonstration du *Problème universel* (*Quarterly Journal*, avril 1873).

<sup>(3)</sup> A. S., t. III, p. 405 (*Philosophie de l'infini*, p. 98).

<sup>(4)</sup> A. S., t. III, p. 484.

<sup>(5)</sup> A. S., t. III, p. 358.

<sup>(6)</sup> A. S., t. III, p. 363.

<sup>(7)</sup> A. S., t. III, p. 275.

Si cette marche devait être regardée comme irréprochable, il n'y aurait plus aucune raison pour préférer la formule du binôme au triangle arithmétique.

La formule de Wronski, toute compliquée qu'elle paraisse au premier abord, ne me semble donc pas devoir être rejetée, à condition qu'elle donne très aisément les résultats relatifs aux changements les plus simples. Sa longueur tient à ce que, pour avoir un déterminant, on introduit beaucoup de termes qui ne subsisteraient pas dans le développement. L'exemple bien connu de la multiplication des déterminants justifie amplement cette manière de procéder par des applications très variées et toutes remarquables, dont le nombre s'accroît de jour en jour. Je donnerai d'ailleurs, pour obtenir les coefficients numériques, une formule qui n'exige pas des calculs autres que ceux qu'on serait obligé d'effectuer pour développer la puissance  $m^{\text{ième}}$  d'un polynôme entier. Quant aux fonctions que l'on peut considérer comme suffisamment connues :

$$\begin{array}{ll} y = x^u, & \\ y = e^x, & y = Lx, \\ y = \cos x, & y = \text{tang } x, \\ y = \text{arc } \cos x, & y = \text{arc } \text{tang } x, \end{array}$$

je ferai voir que les changements de variable indépendante auxquels elles donnent naissance conduisent à des formules qu'on peut tirer directement des méthodes générales. Je retrouverai tous les résultats connus actuellement, ainsi que certains autres qui ne me paraissent pas avoir été signalés jusqu'ici.

Ce qui précède suffit pour mettre en pleine lumière l'idée qui m'a inspiré. La route à suivre est dès lors visible. Je commencerai par rappeler dans l'historique la démonstration de la loi générale des séries de Wronski, et je ferai voir qu'elle contient aisément d'autres formules plus récentes. Ensuite je consacrerai trois Chapitres à l'application immédiate de trois méthodes générales qui se complètent l'une l'autre, en choisissant pour chacune d'elles les exemples qui paraissent lui convenir le mieux.

Les cas traités suffiront, je l'espère, pour montrer quel degré de clarté peut atteindre cette question dont la généralité est bien faite pour effrayer au début.

## Historique.

1. Je copie textuellement l'article publié par M. Abel Transon dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (p. 305; 1874) sous ce titre : *Loi des séries de Wronski; sa phoronomie*.

« La démonstration que Wronski a donnée, en 1812, de sa loi des séries, dans la troisième Note annexée au *Mémoire sur la réfutation de la théorie des fonctions analytiques*, est, comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire, extrêmement simple; mais, parce que les premiers Ouvrages de l'auteur ne se trouvent plus dans le commerce, je crois faire une chose utile en publiant ici cette démonstration.....

» L'auteur avait démontré dans sa *Philosophie des Mathématiques*, publiée en 1811, que la forme générale des séries est la suivante :

$$F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x)^{1\xi} + A_2 \varphi(x)^{2\xi} + A_3 \varphi(x)^{3\xi} + \dots,$$

dans laquelle le symbole

$$\varphi(x)^{m\xi} = \varphi(x) \varphi(x + \xi) \varphi(x + 2\xi) \dots \varphi[x + (m - 1)\xi],$$

et il s'agissait, dans la Note de 1812, de donner la formule du coefficient général  $A_\mu$ . Ici je citerai textuellement l'auteur :

« A cet effet, rappelons que la différence régressive d'une fonction  $f(x)$  est l'excès de cette fonction sur celle qui la précède dans l'ordre de l'accroissement  $\xi$  de la variable, savoir

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x - \xi).$$

» L'expression d'un ordre quelconque de ces différences, toujours dans l'ordre régressif, est

$$\begin{aligned} \Delta^\mu f(x) = & f(x) - \frac{\mu}{1} f(x - \xi) \\ & + \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2} f(x - 2\xi) - \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1.2.3} f(x - 3\xi) + \dots \end{aligned}$$

» Appliquant cette formule à une fonction de la forme

$$f(x) = \varphi(x)^{\omega\xi};$$



» on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^\mu \varphi(x)^{\omega\xi} &= \varphi(x)^{\omega\xi} - \frac{\mu}{1} \varphi(x - \xi)^{\omega\xi} \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} \varphi(x - 2\xi)^{\omega\xi} + \dots + (-1)^\mu \varphi(x - \mu\xi)^{\omega\xi}. \end{aligned} \right.$$

» D'ailleurs, puisqu'on a en général

$$\varphi(x - \lambda\xi)^{\omega\xi} = \varphi(x - \lambda\xi) \varphi(x - \lambda\xi + \xi) \dots \varphi[x - \lambda\xi + (\omega - 1)\xi],$$

»  $\lambda$  étant un nombre quelconque, le facteur  $\varphi(x)$  se trouvera contenu  
 » dans la faculté  $\varphi(x - \lambda\xi)^{\omega\xi}$  lorsque  $\omega$  sera plus grand que  $\lambda$  et que,  
 » d'ailleurs,  $\omega$  et  $\lambda$  seront des nombres entiers, ainsi que nous le sup-  
 » poserons ici. Donc le même facteur  $\varphi(x)$  sera contenu dans tous les  
 » termes (1) de la différence  $\Delta^\mu \varphi(x)^{\omega\xi}$  lorsque  $\omega$  sera plus grand que  $\mu$ ;  
 » et, par conséquent, en donnant à  $x$  la valeur qui réduit à zéro le  
 » facteur  $\varphi(x)$ , on aura, dans le cas en question, la valeur

$$(2) \quad \Delta^\mu \varphi(x)^{\omega\xi} = 0.$$

» Or la forme générale des séries est

$$(3) \quad F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x)^{\omega\xi} + \dots$$

» Prenant donc des deux membres de cette expression (3) les diffé-  
 » rences des ordres régressifs 1, 2, 3, 4, ... et donnant ensuite à  $x$  la  
 » valeur qui réduit à zéro le facteur  $\varphi(x)$ , nous aurons, en vertu  
 » de (2),

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta F(x) &= A_1 \Delta \varphi(x), \\ \Delta^2 F(x) &= A_1 \Delta^2 \varphi(x) + A_2 \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi}, \\ \Delta^3 F(x) &= A_1 \Delta^3 \varphi(x) + A_2 \Delta^3 \varphi(x)^{2\xi} + A_3 \Delta^3 \varphi(x)^{3\xi}, \\ \Delta^4 F(x) &= A_1 \Delta^4 \varphi(x) + A_2 \Delta^4 \varphi(x)^{2\xi} + A_3 \Delta^4 \varphi(x)^{3\xi} + A_4 \Delta^4 \varphi(x)^{4\xi}, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

» La première de ces équations donne immédiatement  $A_1 = \frac{\Delta F(x)}{\Delta \varphi(x)}$ .  
 » En second lieu, puisque, en vertu de l'équation (2), on a  $\Delta \varphi(x)^{2\xi} = 0$ ,  
 » les deux premières des équations précédentes (4) sont identiques

» avec celles-ci :

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= A_1 \Delta \varphi(x) + A_2 \Delta \varphi(x)^{2\xi}, \\ \Delta^2 F(x) &= A_1 \Delta^2 \varphi(x) + A_2 \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi},\end{aligned}$$

» équations qui donnent immédiatement

$$A_2 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi}]} \quad (1).$$

» En troisième lieu, observant qu'en vertu de la valeur générale (2) on a

$$\Delta \varphi(x)^{2\xi} = 0, \quad \Delta \varphi(x)^{2\xi} = 0, \quad \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi} = 0,$$

on verra que les trois premières équations sont identiques avec celles-ci :

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= A_1 \Delta \varphi(x) + A_2 \Delta \varphi(x)^{2\xi} + A_3 \Delta \varphi(x)^{3\xi}, \\ \Delta^2 F(x) &= A_1 \Delta^2 \varphi(x) + A_2 \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi} + A_3 \Delta^2 \varphi(x)^{3\xi}, \\ \Delta^3 F(x) &= A_1 \Delta^3 \varphi(x) + A_2 \Delta^3 \varphi(x)^{2\xi} + A_3 \Delta^3 \varphi(x)^{3\xi},\end{aligned}$$

» équations qui donnent encore immédiatement

$$A_3 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi} \Delta^3 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi} \Delta^3 \varphi(x)^{3\xi}]} \quad (2),$$

» et, procédant de la même manière, on verra, non par induction, mais  
» par le principe même de la formation de ces quantités, qu'on aura,  
» en général,

$$(5) \quad A_\mu = \frac{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi} \dots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{(\mu-1)\xi} \Delta^\mu F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 \varphi(x)^{2\xi} \dots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{(\mu-1)\xi} \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu\xi}]},$$

»  $\mu$  étant un indice quelconque.

» De plus, ayant égard à la valeur de  $x$  dans cette expression du  
» coefficient général  $A_\mu$  et, par suite, à la valeur (2), on verra que la  
» somme combinatoire formant le dénominateur de  $A_\mu$ , que nous ve-

(1) Le symbole  $[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 F(x)]$  désigne évidemment le déterminant

$$\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 F(x) - \Delta^1 F(x) \Delta^2 \varphi(x).$$

Il est curieux de constater ici que Wronski se sert couramment des déterminants qu'il appelle *fonctions schins* (A. S., t. III, p. 423).

(2) Le numérateur et le dénominateur sont encore des déterminants connus.

» nons de déterminer, se réduit à son premier terme, c'est-à-dire  
 » qu'on a

$$[\Delta^1 \varphi(x) \dots \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu!}] = \Delta^1 \varphi(x) \dots \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu!},$$

» et c'est là l'expression algorithmique de la loi générale des séries...

2. Il me reste maintenant à montrer que les formules

$$(4) \quad \Delta^\mu F(x) = A_1 \Delta^\mu \varphi(x) + \dots + A_\mu \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu!},$$

$$(5) \quad A_\mu = \frac{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 \varphi(x)^{2!} \dots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{(\mu-1)!} \Delta^\mu F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x) \Delta^2 \varphi(x)^{2!} \dots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{(\mu-1)!} \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu!}]}$$

comprennent, comme cas particuliers : la première, la formule générale relative à la  $\mu^{\text{ième}}$  dérivée d'une fonction de fonction; la seconde, la formule générale relative au changement de la variable indépendante.

On peut reprocher à la démonstration de ne pas tenir compte de ce que les termes qu'on néglige comme nuls séparément, dans le second membre des équations (4), sont en nombre infini.

Le passage direct des différences finies aux différentielles serait encore très critiquable; aussi M. A.-S. de Montferrier indique-t-il dans son Ouvrage<sup>(1)</sup> la manière d'appliquer directement la méthode de Wronski à la série de Taylor, en s'appuyant sur la règle de L'Hôpital.

J'emploierai la marche suivante pour arriver assez rapidement aux équations qui se déduiraient des équations (4) par simple substitution des différentielles aux différences, sans qu'aucune série ait à intervenir dans le calcul.

3. *Lemme.* — Désignant par  $x$  une fonction quelconque d'une variable indépendante  $u$  et représentant, pour abrégé, par

$$d^m \dot{x}^p$$

la différentielle  $m^{\text{ième}}$  de  $x^p$  dans laquelle on supprime, une fois le développement effectué, tous les termes qui contiennent  $x$  en facteur, on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} d^m \dot{x}^m &= 1.2.3 \dots m (dx)^m, \\ d^m \dot{x}^p &= 0, \quad \text{si } m < p. \end{aligned}$$

---

(1) A. S., t. III, p. 265 et 266.

En effet, on sait que

$$d^m z^p = ((dz + dz + \dots + dz))^m \equiv \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \dots} d^\alpha z d^\beta z \dots,$$

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = m,$$

$\alpha, \beta, \dots$ , étant des entiers positifs qui peuvent s'annuler.

Dans le cas actuel,

$$d^m \dot{x}^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \dots} d^\alpha \dot{x} d^\beta \dot{x} \dots$$

avec ceci en plus que, dans le calcul développé, il faut faire

$$d^0 \dot{x} \equiv \dot{x} = 0.$$

Ce résultat s'obtiendra encore en ne prenant que les solutions de

$$\alpha + \beta + \dots = m,$$

pour lesquelles aucun des entiers positifs du premier membre ne sera nul.

Aucun des entiers positifs  $\alpha, \beta, \dots$  ne doit être nul et la somme doit être  $m$ ; il est clair que tous seront égaux à 1. On n'aura que le terme correspondant à  $\alpha = \beta = \dots = 1$ , c'est-à-dire

$$d^m \dot{x}^m = 1.2 \dots m (dx)^m.$$

Je suppose maintenant qu'on ait à calculer

$$d^m \dot{x}^p \quad (m < p);$$

le nombre des entiers positifs  $\alpha, \beta, \dots$  étant plus grand que  $m$ , il y en aura toujours au moins  $p - m$  nuls, d'où

$$d^m \dot{x}^p = 0 \quad (m < p).$$

4. *Dérivées d'une fonction de fonction.* — Je remarque d'abord qu'on n'a pas besoin de connaître la formule générale qui donne la dérivée  $m^{\text{ième}}$  d'une fonction de fonction

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

pour être sûr que  $\frac{d^m y}{dx^m}$  est un polynôme entier sans terme constant,

soit par rapport aux  $m$  premières dérivées de  $u$  par rapport à  $x$ , soit par rapport aux dérivées  $f^{(1)}(u)$ ,  $f^{(2)}(u)$ , ...,  $f^{(m)}(u)$ .

Supposant la loi vraie pour l'indice  $m$ , on a

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)})$$

$F$  étant un polynôme entier. Le théorème des fonctions composées donne

$$\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} = \left( \frac{\partial F}{\partial f^{(1)}} f^{(2)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial f^{(m)}} f^{(m+1)} \right) u^{(1)} + \frac{\partial F}{\partial u^{(1)}} u^{(2)} + \dots$$

La loi s'étend à l'indice  $m + 1$ ; comme elle est vraie pour  $m = 1$ , elle est générale. Donc  $\frac{d^m y}{dx^m}$  est un polynôme entier sans terme constant en  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$ , les coefficients étant des polynômes entiers en  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$ .

Cela posé, si j'écris, pour abréger,

$$F(x) \equiv y, \quad F^{(p)}(a) = 1.2 \dots p A_p,$$

la formule préliminaire de Taylor peut s'écrire

$$y = A_0 + A_1(x - a) + \dots + A_m(x - a)^m + P,$$

$A_0, A_1, \dots, A_m$  étant des nombres.

Supposant que  $y$  soit une fonction continue, ainsi que ses  $m$  premières dérivées, et que la  $(m + 1)^{\text{ième}}$  existe, dans l'intervalle de  $a$  à  $x$ , je prendrai pour définition de la fonction  $P \equiv \Phi(x)$ , dans ce même intervalle, l'équation

$$\Phi(x) \equiv y - A_0 - A_1(x - a) - \dots - A_m(x - a)^m.$$

On démontrerait sans peine que  $\Phi(x)$  et ses  $m$  premières dérivées par rapport à  $x$  sont continues et que la  $(m + 1)^{\text{ième}}$  dérivée existe dans l'intervalle de  $a$  à  $x$ .

Il est évident que, si l'on prend  $x$  comme variable indépendante, on a

$$\Phi(a) = \Phi^{(1)}(a) = \dots = \Phi^{(m)}(a) = 0.$$

Si  $x$  n'est plus variable indépendante,  $\Phi(x)$  est une fonction de fonction et, d'après la remarque par laquelle j'ai débuté, ses  $m$  premières



ce qui donne

$$A_p = \frac{1}{1.2 \dots p} f^{(p)}(u_0),$$

il vient

$$(A) \quad \begin{cases} y = f(u), & u = \varphi(x), \\ \frac{d^m y}{dx^m} = [u - u_0]^{(m)} f^{(1)}(u_0) + \frac{1}{1.2} [(u - u_0)^2]^{(m)} f^{(2)}(u_0) + \dots \\ \quad + \frac{1}{1.2 \dots m} [(u - u_0)^m]^{(m)} f^{(m)}(u_0), \end{cases}$$

le point placé au-dessus de  $u - u_0$  signifiant toujours qu'on doit remplacer  $u^{(0)} \equiv u$  par  $u_0$  dans le développement, ce qui équivaut à faire  $u - u_0 = 0$ .

Il me paraît superflu de rien ajouter pour prouver qu'en développant par la formule du binôme  $(u - u_0)^p$ , avant de prendre sa  $m^{\text{ième}}$  dérivée, et remarquant que, dès lors, on peut sans ambiguïté remplacer  $u_0$ , qui est une valeur particulière mais quelconque par  $u$ , on retrouve la formule relative à la  $n^{\text{ième}}$  dérivée d'une fonction de fonction, telle que la donne M. Hermite à la page 62 de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* :

$$(B) \quad \begin{cases} y = f(u), & u = \varphi(x), \\ \frac{d^n y}{dx^n} = 1.2 \dots n \left[ A_1 f'(u) + \frac{A_2}{1.2} f''(u) + \dots \right. \\ \quad \left. + \frac{A_i}{1.2 \dots i} f^{(i)}(u) + \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(u) \right], \\ A_i = \frac{1}{1.2 \dots n} \left[ (u^i)^{(n)} - \frac{i}{1} (u^{i-1})^{(n)} u + \frac{i(i-1)}{1.2} (u^{i-2})^{(n)} u^2 - \dots \right], \end{cases}$$

le dernier terme de la quantité entre parenthèses étant

$$(-1)^{i-1} (u)^{(n)} u^{i-1}. \quad »$$

5. *Remarque.* — L'hypothèse consistant à faire  $u = u_0$  dans le développement supposé effectué de  $[(u - u_0)^p]^{(m)}$  que je représente, d'après Wronski, par un point

$$[(u - u_0)^p]^{(m)},$$

revient tout simplement à développer  $[u^p]^{(m)}$  et à ne conserver, dans ce développement, que les termes qui ne contiennent pas  $u$  en facteur.

En effet, d'après le théorème sur lequel je me suis déjà appuyé pour démontrer le lemme, on a, d'une part,

$$\begin{aligned} [(u - u_0)^p]^{(m)} &= ((u - u_0) + (u - u_0) + \dots + (u - u_0))^m \\ &= \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \dots} [u - u_0]^{(\alpha)} [u - u_0]^{(\beta)} \dots, \\ &\alpha + \beta + \dots = m; \end{aligned}$$

on a, d'autre part,

$$(u^p)^{(m)} = ((u + u + \dots + u))^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \dots} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} \dots;$$

or, la dérivée d'une différence étant la différence des dérivées des facteurs, on a

$$(u - u_0)^{(\alpha)} = u^{(\alpha)},$$

sauf pour  $\alpha = 0$ .

Comme on doit faire  $u = u_0$  dans le premier développement, tout terme qui contiendra  $(u - u_0)^0$  sera nul; si donc on supprime du second développement le terme correspondant  $u^0 \equiv u$ , on retrouvera identiquement les mêmes termes.

On peut donc écrire les formules obtenues précédemment

$$(4 \text{ bis}) \quad d^m y = A_1 d^m (x - a) + A_2 d^m (x - a)^2 + \dots + A_m d^m (x - a)^m,$$

$$(A) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = [u - u_0]^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2} [(u - u_0)^2]^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots,$$

sous une nouvelle forme abrégée plus courte, quoique identique au fond,

$$d^m y = A_1 d^m \dot{x} + \dots + A_m d^m \dot{x}^m,$$

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = [\dot{u}]^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2} [\dot{u}^2]^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots m} [\dot{u}^m]^{(m)} \frac{d^m y}{du^m},$$

« le point placé sur  $x$  ou sur  $u$  indiquant la valeur zéro qu'il faut donner à cette variable (1) » après avoir, bien entendu, effectué le développement.

---

(1) *A. S.*, t. III, p. 266.



[illegible]
$$A_m = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots m} \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right)_{x=a},$$
$$\frac{1}{1.2.3\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \begin{vmatrix} d(x \dot{-} a) & d(x \dot{-} a)^2 & \dots & d(x \dot{-} a)^{m-1} & dy \\ d^2(x \dot{-} a) & d^2(x \dot{-} a)^2 & \dots & d^2(x \dot{-} a)^{m-1} & d^2 y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^m(x \dot{-} a) & d^m(x \dot{-} a)^2 & \dots & d^m(x \dot{-} a)^{m-1} & d^m y \end{vmatrix}$$
$$d^p(x - a)^q = 0 \quad \text{si} \quad p < q,$$
$$d(x-a)d^2(x-a)^2\dots d^m(x-a)^m.$$
$$1.d(x-a).1.2.[d(x-a)]^2 \dots (1.2.3 \dots m)[d(x-a)]^m;$$
$$1.1.2.1.2.3 \dots 1.2 \dots m (dx)^{1+2+3+\dots+m}.$$

Quant au numérateur, on peut aisément le transformer de manière à remplacer  $d^p(x-a)^q$  par  $d^p x^q$ .

En effet, ce numérateur peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} dx & dx^2 - 2a dx & dx^3 - 3a dx^2 + 3a^2 dx & \dots \\ d^2x & d^2x^2 - 2a d^2x & d^2x^3 - 3a d^2x^2 + 3a^2 d^2x & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^m x & d^m x^2 - 2a d^m x & d^m x^3 - 3a d^m x^2 + 3a^2 d^m x & \dots \end{vmatrix}.$$

Il est visible que l'on ajoutera aux éléments de la seconde colonne les éléments correspondants de la première multipliés par  $2a$ ; on multipliera ensuite les éléments de la première colonne par  $-3a^2$ , ceux de la deuxième déjà modifiée par  $3a$ , et l'on ajoutera à la troisième colonne, etc.

On obtient donc

$$(D) \quad \frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dx^2 & \dots & dx^{m-1} & dy \\ d^2x & d^2x^2 & \dots & d^2x^{m-1} & d^2y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^m x & d^m x^2 & \dots & d^m x^{m-1} & d^m y \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\dots(1.2\dots m)(dx)^{1+2+3+\dots+m}}.$$

Il faut faire  $x = a$  dans le résultat; mais, comme  $a$  est une valeur quelconque, rien n'empêche de conserver  $x$ . L'analogie avec la formule (5) est évidente. On peut d'ailleurs employer les notations de Wronski, qui désigne les déterminants sous le nom de *fonctions schins* et les représente par conséquent par la lettre hébraïque  $\varpi$ ,

$$\frac{1}{1^{\mu}!} \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} = \frac{\varpi(d^1 x d^2 x^2 \dots d^{\mu-1} x^{\mu-1} d^{\mu} y)}{(1^{1!} . 1^{2!} . 1^{3!} \dots 1^{\mu-1!} . 1^{\mu!}) (dx)^{1+2+\dots+\mu}} \quad (1).$$

7. *Remarque.* — Si l'on veut faire disparaître un assez grand nombre de termes du déterminant (D), on peut employer la simplification indiquée pour les formules (4<sup>ter</sup>) dans la Remarque du n° 5,

$$(E) \quad \frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} dx & 0 & 0 & \dots & 0 & dy \\ d^2x & d^2x^2 & 0 & \dots & 0 & d^2y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^m x & d^m x^2 & d^m x^3 & \dots & d^m x^{m-1} & d^m y \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\dots(1.2\dots m)(dx)^{1+2+\dots+m}}.$$

(1) *L. S.*, t. III, p. 381.

Si l'on applique la règle de Laplace, qui donne le développement d'un déterminant suivant des éléments des  $(p-1)$  premières lignes, on obtient, en appliquant le lemme du n° 3, après des réductions faciles <sup>(1)</sup>,

$$\frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\pm d^p y \begin{vmatrix} d^{p+1} \dot{x}^p & d^{p+1} \dot{x}^{p+1} & \dots & 0 \\ d^{p+2} \dot{x}^p & d^{p+2} \dot{x}^{p+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ d^m \dot{x}^p & d^m \dot{x}^{p+1} & \dots & d^m \dot{x}^{m-1} \end{vmatrix}}{(1.2\dots p)(1.2\dots p+1)\dots(1.2\dots m)(dx)^{p+(p+1)\dots+m}}.$$

Ce résultat a l'inconvénient, dans les exemples théoriques, de contenir l'hypothèse indiquée par  $\dot{x}$ ; dans le développement explicite, il donnerait encore lieu à de nombreuses réductions. Je me borne à le signaler.

8. On voit que les formules (D) et (E), dues à Wronski, sont une conséquence immédiate de la formule relative à la dérivée d'ordre quelconque d'une fonction de fonction. Si la démonstration qui a été donnée de cette formule ne convient pas, il suffira de la remplacer par toute autre que l'on préférera.

Par exemple, on pourra partir du résultat (B) indiqué par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse*. Le point de départ est, comme pour Wronski, la série de Taylor. J'ai déjà déduit (n° 4) cette expression (B) d'une autre expression équivalente, mais exprimée par une notation plus concise (A); cette forme (A) a plus spécialement servi pour exprimer d'une manière facile à retenir la formule du changement de variable. Je vais établir, en quelques mots, que, si l'on prenait (B) comme point de départ, on arriverait immédiatement à (A).

On suppose démontré que <sup>(2)</sup>

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x);$$

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = 1.2\dots n [A_1 f^{(1)}(u) + \dots + A_n f^{(n)}(u)], \\ A_i = \frac{1}{1.2\dots n} \left[ (u^i)^{(n)} - \frac{i}{1} (u^{i-1})^{(n)} u + \dots + (-1)^{i-1} i (u)^{(n)} u^{i-1} \right]. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> *A. S.*, t. III, p. 427.

<sup>(2)</sup> *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Ch. Hermite, p. 62.

En vertu de ce théorème évident que la dérivée  $i^{\text{ème}}$  d'une somme est la somme des dérivées  $i^{\text{èmes}}$  des différents termes, on a

$$\begin{aligned} & \left[ (u^i)^{(n)} - \frac{i}{1} u_0 (u^{i-1})^{(n)} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{i}{1} u_0^{i-1} (u)^{(n)} \right] \\ & \equiv \left[ u^i - \frac{i}{1} u_0 u^{i-1} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{i}{1} u_0^{i-1} u \right]^{(n)} \\ & \equiv [(u - u_0)^i - u_0^i]^{(n)} \equiv [(u - u_0)^i]^{(n)}, \end{aligned}$$

et par suite, en remplaçant  $n$  par  $m$ ,

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{d^m y}{dx^m} = [u - u_0]^{(m)} \frac{dy}{du} \\ \quad + \frac{1}{1.2} [(u - u_0)^2]^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots m} [(u - u_0)^m]^{(m)} \frac{d^m y}{du^m}. \end{cases}$$

J'ai d'ailleurs montré, dans une remarque 5, que cette formule pouvait encore être écrite d'une manière plus condensée, bien qu'identique au fond :

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = (\dot{u})^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2} (\dot{u}^2)^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots m} (\dot{u}^m)^{(m)} \frac{d^m y}{du^m}.$$

9. Les formes (A), (B), (C) me paraissent faciles à retenir. C'est ce qui me les a fait adopter dans ce travail. Elles indiquent, sous leur forme abrégée, un développement facile à rendre explicite et qui d'ailleurs est déjà connu.

Le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  est  $\frac{1}{1.2 \dots p} (\dot{u}^p)^{(m)}$ . Développant, on tombe immédiatement sur le résultat indiqué par M. Bertrand (1) :

$$(F) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{1.2 \dots m} \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^{h_1}}{1.2 \dots h_1} \frac{\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^{h_2}}{1.2 \dots h_2} \dots \frac{\left(\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}\right)^{h_\alpha}}{1.2 \dots h_\alpha} \frac{d^p y}{du^p};$$

$h_1, h_2, \dots, h_\alpha$  étant des entiers positifs, tels que

$$\begin{aligned} h_1 + 2h_2 + \dots + \alpha h_\alpha &= m, \\ h_1 + h_2 + \dots + h_\alpha &= p. \end{aligned}$$

---

(1) *Traité de Calcul différentiel*, par M. J. Bertrand, p. 309.

En effet,  $(u^p)^{(m)}$  se déduit de  $(u_1 u_2 \dots u_p)^{(m)}$ ; par suite de l'hypothèse représentée par  $\dot{u}$ , il n'y a à considérer que les termes contenant les  $p$  quantités  $u_1, u_2, \dots, u_p$ . Soit donc un terme à coefficient

$$\frac{P_m}{P_1^{h_1} P_2^{h_2} \dots P_\alpha^{h_\alpha}},$$

contenant  $h_1$  premières puissances,  $h_2$  secondes puissances, ...,  $h_\alpha$  puissances  $\alpha$ , de telle sorte que

$$\begin{aligned} h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + \alpha h_\alpha &= m, \\ h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_\alpha &= p. \end{aligned}$$

Il est nécessaire de remarquer que des termes qui sont distincts si l'on conserve les indices deviennent égaux si on les supprime; ce sont ceux qui se déduiraient du premier en permutant entre elles les  $h_1$  quantités élevées à la première puissance, ainsi que les  $h_2$  élevées à la deuxième puissance, .... Si donc on supprime les indices, le même terme est répété autant de fois qu'on peut former de permutations différentes avec les  $h_1$  objets du premier groupe considérés comme pouvant être pris dans un ordre quelconque, avec les  $h_2$  objets du second groupe pris abstraction faite de leur ordre, .... Un même terme est alors répété autant de fois qu'il y a de permutations avec répétition de  $p$  objets,  $h_1$  étant égaux entre eux,  $h_2$  autres égaux entre eux, ..., c'est-à-dire

$$\frac{P_p}{P_{h_1} P_{h_2} \dots P_{h_\alpha}}.$$

Si donc on ne veut prendre chaque terme qu'une seule fois, il faudra multiplier son coefficient par ce nombre, ce qui donnera

$$\frac{P_m}{P_1^{h_1} \dots P_\alpha^{h_\alpha}} \frac{P_p}{P_{h_1} P_{h_2} \dots P_{h_\alpha}}.$$

Nous avons ici le développement de  $(\dot{u}^p)^{(m)}$ ; or il ne s'agit dans (F) que de celui de  $\frac{1}{P_p} (\dot{u}^p)^{(m)}$ . On a donc

$$P_m \frac{\left(\frac{u^{(1)}}{P_1}\right)^{h_1}}{P_{h_1}} \frac{\left(\frac{u^{(2)}}{P_2}\right)^{h_2}}{P_{h_2}} \dots,$$

comme il s'agissait de l'établir en partant directement des formules fondamentales.

10. La *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, de Wronski, fut « l'occasion d'une polémique très ardente », à la suite de laquelle « un silence convenu ou tacite s'établit autour du réformateur <sup>(1)</sup> ». Les formules que je viens de rappeler n'attirèrent pas l'attention des savants. Depuis, quelques auteurs ont retrouvé, par des méthodes particulières, la dérivée  $m^{\text{ième}}$  d'une fonction de fonction, sans que l'antériorité de Wronski, dont le Mémoire date de 1812, me paraisse contestable.

Je pourrais donc me borner à passer aux applications que j'ai cru devoir faire pour montrer que les notations employées par Wronski dès le début sont assez claires pour conduire directement à tous les résultats particuliers obtenus jusqu'à présent par des procédés élégants, mais variables d'un exemple à l'autre.

Je citerai cependant, pour compléter ce court historique, trois travaux remarquables, faits chacun à un point de vue différent.

11. Dans les *Nouvelles Annales* de M. Terquem (t. IX et XI) se trouve un article intitulé : *Sur la différentiation des fonctions de fonctions. Séries de Burmann, de Lagrange, de Wronski*, par M. A..., ancien élève de l'École Polytechnique. Cet article est assez intéressant pour que M. Combescurre l'ait jugé digne de figurer en note dans sa traduction de la *Théorie des déterminants*, par M. Brioschi.

Les notations initiales sont les suivantes :

$$(F) \quad \begin{cases} z = F(y), & y = \varphi(x), \\ \frac{d^n z}{dx^n} = A_1 F'(y) + A_2 F''(y) + \dots + A_n F^{(n)}(y), \\ A_m = 1.2 \dots n \sum \frac{[\varphi'(x)]^{m_1}}{1.2 \dots m_1} \frac{[\varphi''(x)]^{m_2}}{1.2 \dots m_2} \dots \frac{[\varphi^{(n)}(x)]^{m_n}}{1.2 \dots m_n}, \end{cases}$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$  étant des nombres entiers et positifs ( $y$  compris zéro),

---

(1) *A. S.*, t. III, p. 482.

qui doivent satisfaire aux équations

$$m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n = m.$$

On reconnaît aussitôt la formule (F) déjà établie (n° 9).

Ensuite l'auteur, en vue du but spécial qu'il s'est proposé, ainsi que l'indique le titre, donne au résultat la forme suivante :

$$(G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \theta, \\ \frac{d^n z}{dx^n} = \frac{n}{1} F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} \\ \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} F'''(y) \frac{d^{n-3}(\theta^3)_0}{dh^{n-3}} + \dots \end{array} \right.$$

(le zéro indiquant qu'on doit faire  $h = 0$  après les différentiations).

Je vais montrer qu'on passe facilement de cette forme (G) à la forme (A) indiquée plus haut. Pour revenir aux notations que j'ai employées jusqu'ici, j'écris

$$(G) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f(u), \quad u = \varphi(x) \\ \text{ou encore} \\ u = \varphi(x_0 + x), \quad u_0 = \varphi(x_0) \\ (x_0 \text{ étant la valeur initiale arbitraire}), \\ \frac{u - u_0}{x} = \theta, \\ \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n}{1} \frac{d^{n-1}(\theta)}{dx^{n-1}} \frac{dy}{du} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^{n-2}(\theta^2)}{dx^{n-2}} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots \end{array} \right.$$

Or on a, par la formule de Maclaurin,

$$(u - u_0)^p = (u - u_0)^p + \frac{x}{1} [(u - u_0)^p]^{(1)} + \dots + \frac{x^p}{1.2 \dots p} [(u - u_0)^p]^{(p)} + \dots$$

D'après le lemme du n° 3, les  $p$  premiers termes du second membre s'annulent; il reste

$$(u - u_0)^p = \frac{x^p}{1.2 \dots p} [(u - u_0)^p]^{(p)} + \frac{x^{p+1}}{1.2 \dots (p+1)} [(u - u_0)^p]^{(p+1)} + \dots$$

par suite

$$\theta^p \equiv \frac{(u - u_0)^p}{x^p} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} [(u - u_0)^p]^{(p)} + \frac{x}{1 \cdot 2 \dots (p+1)} [(u - u_0)^p]^{(p+1)} + \dots,$$

$$(\theta^p)^{(n-p)} = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-p)}{1 \cdot 2 \dots n} [(u - u_0)^p]^{(n)} + \beta x + \gamma x^2 + \dots;$$

d'où, en faisant  $x = 0$ ,

$$(\theta^p)^{(n-p)} = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-p)}{1 \cdot 2 \dots n} [(u - u_0)^p]^{(n)}.$$

Alors le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  dans (G) étant

$$\frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} (\theta^p)^{(n-p)}$$

peut encore s'écrire, après réductions faciles,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} [(u - u_0)^p]^{(n)} \equiv \frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} (u^p)^{(n)},$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

L'auteur termine son article par la démonstration du résultat suivant :

$$\alpha \theta = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

$$\frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\theta^{-n} F(x+h)]_{h=0} = \frac{[\Sigma \pm D' \varphi(x) D^2 \varphi(x)^2 \dots D^{n-1} \varphi(x)^{n-1} D^n F(x)]}{1! 2! 3! \dots n! [D \varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Ce beau théorème est dû à M. Wronski (*Philosophie de la Technique*, 2<sup>e</sup> Section, p. 110). »

Il semble donc que l'auteur se soit tout simplement proposé d'obtenir par une démonstration suivie un théorème déduit par l'inventeur de deux résultats obtenus d'une manière indépendante, comme cas particuliers de formules beaucoup plus générales.

J'ai déjà indiqué que c'est comme déduction de la « Loi suprême ou universelle de l'Algorithmie » que Wronski présente sa loi fondamentale des séries du n° 1, qui conduit immédiatement, comme on l'a vu plus haut, à

$$\frac{1}{m!} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\Sigma \pm (d'x d^2 x^2 \dots d^{m-1} x^{m-1} d^m y)}{1! 2! 3! \dots m! (dx)^{1+2+3+\dots+m}}.$$



Passant ensuite de la *génération technique systématique* <sup>(1)</sup> à la *comparaison technique* <sup>(2)</sup>, le philosophe résout le *problème universel*, dont la formule s'établirait rapidement par les méthodes employées en Calcul différentiel pour en établir « le cas le plus particulier », la série de Lagrange. Or, étant donnée une fonction quelconque

$$y = f(x) = F(u), \quad x = \varphi(u),$$

si je pose  $\frac{x - x_0}{u - u_0} = \theta$ , d'où

$$u = u_0 + (x - x_0)\theta^{-1},$$

j'ai, en appliquant la loi de Lagrange et en remarquant que,  $\Phi(x)$  étant une fonction quelconque de  $x$ ,

$$\left[ \frac{d^m \Phi(x)}{dx^m} \right]_{x=x_0} \equiv \left[ \frac{d^m \Phi(x_0 + h)}{dh^m} \right]_{h=0} \equiv \left[ \frac{d^m \Phi(x)}{d(x - x_0)^m} \right]_{x=x_0},$$

l'égalité qui suit :

$$\left[ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right]_{x=x_0} = \left\{ \frac{d^{m-1}}{du^{m-1}} \left[ \theta^{-m} \frac{dF(u)}{du} \right] \right\}_{u=u_0}.$$

Posant  $u = u_0 + h$  et appliquant de nouveau la remarque qui vient d'être faite, on trouve, en supprimant les indices de  $u_0$  et  $x_0$  qui sont inutiles ( $u_0$  et  $x_0$  étant des valeurs initiales quelconques),

$$(H) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \left\{ \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}} [\theta^{-m} F'(u + h)] \right\}_{h=0}.$$

Égalant les deux valeurs ainsi trouvées pour  $\frac{d^m y}{dx^m}$ , on obtient, avec des notations très peu différentes, le théorème énoncé plus haut.

Il est donc visible que, contrairement à l'auteur de l'article que je viens d'analyser, j'ai conservé à part les deux résultats qu'il cherche à relier l'un à l'autre.

J'ai déjà montré l'utilité de la formule

$$(D) \quad \frac{1}{m!} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\sum \pm (d^1 x d^2 x^2 \dots d^m y)}{1! \dots m! (dx)^{1+2+\dots+m}}.$$

<sup>(1)</sup> *A. S.*, t. III, p. 358-391.

<sup>(2)</sup> *A. S.*, t. III, p. 391-429.

Je retrouverai, dans le Chapitre III, la formule

$$\frac{d^m \gamma}{dx^m} = \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}} [\theta^{-m} F'(u + h)]$$

sous la forme

$$(H) \quad \frac{d^m \gamma}{dx^m} = \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}} \left[ \left( x' + \frac{h}{1.2} x'' + \dots \right)^{-m} \left( y' + \frac{h}{1} y'' + \dots \right) \right]_{h=0};$$

on verra alors tout le parti que je tire de cette formule très simple au point de vue du développement explicite de la formule générale du changement de la variable indépendante.

12. Au moment d'achever cette nouvelle rédaction, je trouve, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, deux articles par M. E. Cesaro, intitulés : *Dérivées de fonctions de fonctions* (janvier 1885); *Note sur le calcul isobarique* (février 1885).

Il n'y a donc pas à s'étonner que la formule (F) soit présentée sous cette forme :

« Formule générale :

$$(9) \quad \frac{1}{p!} \frac{d^p \gamma}{dx^p} = \sum_{v=1}^{v=p} \left[ \frac{1}{v!} \frac{d^v \gamma}{du^v} \sum_p \left( \frac{1}{r!} \frac{d^r u}{dx^r} \right) \right].$$

Pour expliquer le sens de cette formule, rappelons d'abord que, ayant toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = p,$$

on appelle *algorithme isobarique* d'une fonction  $f(r)$  et l'on désigne par

$$\sum_p^m f(r) \text{ la somme de tous les produits analogues à } f(r_1) f(r_2) \dots f(r_m). \text{ »}$$

Cette formule est si peu différente de la formule (F) indiquée plus haut (n° 9), que je crois pouvoir me dispenser d'insister sur ce point.

Le rapprochement que l'on constate ici entre la formule relative aux dérivées d'une fonction de fonction (n° 4) et le calcul isobarique est confirmé par ces paroles de M. E. Cesaro (p. 49) :

« La relation (9) comprend comme cas très particulier, pour dif-

férentes formes de la fonction  $\varphi$ , toutes les formules contenues dans notre article *Algorithme isobarique* et démontrées par une autre voie dans le *Journal de Battaglini*. »

La démonstration de l'auteur, qui « ne suppose aucunement que les fonctions considérées soient développables par la formule de Taylor », est très simple; avec les notations que j'ai adoptées, elle s'établit ainsi.

Supposons qu'on ait démontré la formule vraie pour l'indice  $m$  et qu'on veuille l'étendre à l'indice  $(m+1)$ . On sait que

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \dots + \frac{1}{1.2\dots(p-1)} (\dot{u}^{p-1})^{(m)} \frac{d^{p-1} y}{du^{p-1}} + \frac{1}{1.2\dots p} (\dot{u}^p)^{(m)} \frac{d^p y}{du^p} + \dots$$

Prenant les dérivées des deux membres par rapport à  $x$ , il suffit d'établir que le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  deviendra

$$\frac{1}{1.2\dots p} (\dot{u}^p)^{(m+1)}.$$

Pour faire le calcul, supprimons partiellement (là où l'on aura à effectuer le développement) l'hypothèse indiquée par le point placé au-dessus de  $\dot{u}$ . Le terme en  $\frac{d^p y}{du^p}$  proviendra de

$$\frac{1}{1.2\dots(p-1)} (\dot{u}^{p-1})^{(m)} \frac{d\left(\frac{d^{p-1} y}{du^{p-1}}\right)}{du} \frac{du}{dx} + \frac{1}{1.2\dots p} \frac{d[(\dot{u}^p)^{(m)} - \dots]}{dx} \frac{d^p y}{du^p};$$

d'où

$$\frac{1}{p!} \left[ p(\dot{u}^{p-1})^{(m)} u' + (\dot{u}^p)^{(m+1)} - \frac{p}{1} (\dot{u}^{p-1})^{(m)} u' - \frac{p}{1} (\dot{u}^{p-1})^{(m+1)} \dot{u} - \dots \right] \frac{d^p y}{du^p}.$$

Supprimant tous les termes qui contiennent  $\dot{u}$  en facteur, puisque  $\dot{u} = 0$  et que ces termes sont en nombre fini, le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  est

$$\frac{1}{p!} [p(\dot{u}^{p-1})^{(m)} u' + (\dot{u}^p)^{(m+1)} - p(\dot{u}^{p-1})^{(m)} u'] \equiv \frac{1}{p!} (\dot{u}^p)^{(m+1)}.$$

On voit qu'ici la même question est traitée avec des notations sensiblement différentes de celles indiquées plus haut. Mon but, qui est d'appliquer des formules où l'on soit guidé par l'habitude qu'on a des pro-

cédés ordinaires des Calculs différentiel et intégral, s'éloigne notablement de celui de M. E. Cesaro qui s'occupe plus spécialement de développer les méthodes et les applications du calcul isobarique.

L'importance de ce nouveau calcul est nettement définie par l'auteur, qui indique en même temps les sources principales auxquelles on peut recourir dans cette étude. La question est exposée mieux que je ne pourrais le faire.

Je me bornerai à quelques réflexions qui me paraissent à leur vraie place dans un travail destiné à rendre pratiques des formules de Wronski. Le terme *algorithme isobarique* fait songer à ces phrases par lesquelles M. de Montferrier termine la première page de son *Encyclopédie* :

« Nous devons faire observer ici que le nom d'*Algorithmie* a été donné par Wronski à la Science générale des nombres. Avant les travaux de ce savant, on n'avait point désigné par un nom collectif les diverses branches de cette Science qu'il a, le premier, ramenées à une unité synthétique. Le nom d'*Algorithmie* provient d'*algorithme*, qui signifie calcul. »

« Il est curieux, remarque M. E. Cesaro, de constater que tous les inventeurs, en agissant les uns à l'insu des autres, ont été d'accord dans le choix de l'algorithme isobarique composé comme base du calcul des partitions... On sait d'ailleurs que le même algorithme, précédemment étudié par Wronski, sous le nom de *fonction aleph*, a été l'objet des recherches de beaucoup de géomètres. »

13. Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* de décembre 1881 se trouve le compte rendu suivant d'un article publié dans l'*American Journal of Mathematics pure and applied* (t. III, 1879) :

« Glashan (J.-C.). — Sur le changement de la variable indépendante (190-191).

« Soient

$$u = f(y), \quad x = \varphi(y)$$

et

$$x_n = \frac{1}{n!} D_y^n x, \quad u_n = \frac{1}{n!} D_y^n u.$$

Si l'on désigne par  $S_m''$  la somme des termes de poids  $m$  dans le déve-

loppement de

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)^n,$$

on aura (d'après Cauchy)

$$u_n = S_n^1 D_x u + S_n^2 \frac{D_x^2 u}{2!} + \dots + S_n^n \frac{D_x^n u}{n!}.$$

Quant aux valeurs de

$$D_x u, \quad \frac{1}{2!} D_x^2 u, \quad \dots, \quad \frac{1}{n!} D_x^n u,$$

on aura

$$(E) \quad \begin{aligned} D_x u &= \frac{u_1}{x_1}, & \frac{1}{2!} D_x^2 u &= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix}}{x_1 x_1^2}, \\ \frac{1}{n!} D_x^n u &= \frac{\begin{vmatrix} S_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_1 \\ S_2^1 & S_2^2 & 0 & \dots & 0 & u_2 \\ S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 & \dots & 0 & u_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1}^1 & S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \dots & S_{n-1}^{n-1} & u_{n-1} \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \dots & S_n^{n-1} & u_n \end{vmatrix}}{x_1 x_1^2 x_1^3 \dots x_1^{n-1} x_1^n}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici, à part les notations, la formule (E) démontrée plus haut (n° 7). La formule de Cauchy, qui a servi de point de départ, n'est autre chose que la formule (C).

Au risque de rendre les résultats moins intelligibles, on arrive à la formule qui contient le plus de zéros; et, au lieu de la notation  $(\dot{x}^p)^{(m)}$ , qui rappelle l'énoncé du problème, on prend la notation isobarique  $S_m^p$  qui ne me paraît pas faire image comme la première. D'ailleurs, sans m'occuper plus longtemps de comparer les différentes formes sous lesquelles ont pu se présenter les résultats précédents, je me bornerai à remarquer combien est claire et concise la forme adoptée par Wronski et reproduite par M. A.-S. de Montferrier,

$$\frac{1}{1^{m+1}} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\Psi(d^1 x d^2 x^2 \dots d^{m-1} x^{m-1} d^m y)}{(1^{1+1} 1^{2+1} \dots 1^{m+1}) (dx)^{\frac{m(m+1)}{2}}}.$$

**Exposition.**

14. La discussion détaillée que je viens de faire rappelle qu'il existe des formules très générales. Mais on peut être tenté d'admettre que des formules par trop générales cessent de devenir pratiques. C'est cette idée que je désire combattre.

Dans le Chapitre I, je montrerai que la formule générale (D) du changement de variable peut résoudre simplement certaines questions, malgré son apparente complication.

La formule qui donne la dérivée d'une fonction de fonction est relativement courte. On s'explique alors pourquoi (étant donné qu'on a une fonction de  $x$  et qu'on veut introduire une nouvelle variable indépendante  $u$ ), il est souvent commode d'imaginer d'abord que la fonction ait été exprimée en fonction de  $u$  et de remplacer ensuite  $u$  par sa valeur en fonction de  $x$ . Le Chapitre II sera consacré au développement des conséquences de cette idée.

Enfin le troisième et dernier Chapitre sera destiné à montrer l'avantage qu'il peut y avoir à se servir, dans certains cas, des intégrales définies prises entre limites imaginaires.

15. J'ai cherché à obtenir des résultats faciles à écrire, non seulement pour quelques cas particuliers bien connus

$$y = f(x), \quad x = e^u, \quad x = Lu, \quad x = u^{-1}, \quad x = u^{\frac{1}{2}},$$

mais aussi pour toutes les fonctions élémentaires d'un usage courant

$$x = u^k, \quad x = \cos u, \quad x = \tan u, \quad x = \arccos u, \quad x = \arctan u.$$

L'expression, soit symbolique, soit effective, de  $\frac{d^m y}{dx^m}$  en fonction de  $x', x'', \dots; y', y'', \dots$  se présente comme simple application de la formule du binôme. Le développement des coordonnées  $x$  et  $y$  d'une courbe plane suivant les puissances croissantes de l'arc (le rayon de courbure étant une fonction supposée connue de cet arc) s'obtient avec la plus grande facilité et me paraît suffire pour établir l'utilité géométrique des formules générales.

Il est inutile d'insister davantage. Je passe aux applications.

## CHAPITRE I.

## 16. J'ai démontré les formules

$$(D) \quad \frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} (x)^{(1)} & (x^2)^{(1)} & \dots & (x^{m-1})^{(1)} & y^{(1)} \\ (x)^{(2)} & (x^2)^{(2)} & \dots & (x^{m-1})^{(2)} & y^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x)^{(m)} & (x^2)^{(m)} & \dots & (x^{m-1})^{(m)} & y^{(m)} \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\dots(1.2\dots m) [(x)^{(1)}]^{1+2+\dots+m}},$$

$$(E) \quad \frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} (\dot{x})^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & y^{(1)} \\ (\dot{x})^{(2)} & (\dot{x}^2)^{(2)} & 0 & \dots & 0 & y^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\dot{x})^{(m)} & (\dot{x}^2)^{(m)} & (\dot{x}^3)^{(m)} & \dots & (\dot{x}^{m-1})^{(m)} & y^{(m)} \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\dots(1.2\dots m) (\dot{x}^{(1)})^{1+2+\dots+m}}.$$

On est tenté de croire que ces expressions générales constituent deux théorèmes très intéressants, mais inapplicables; il suffirait d'un seul exemple pour prouver le contraire. J'en donnerai deux, et je ferai observer que le premier me fournit une remarque très curieuse.

C'est précisément en traitant par une méthode très ingénieuse ce changement de variable, défini par

$$y = f(x), \quad x = e^u,$$

que M. Bertrand, dans son *Traité classique de Calcul différentiel et intégral*, insiste sur cette idée très importante que souvent les méthodes trop générales donneraient lieu à des calculs prolixes, là où des procédés particuliers conduisent rapidement au résultat. Les théorèmes connus semblaient donc impuissants à résoudre une question presque nécessaire.

Cet état d'infériorité de la théorie algébrique n'était qu'apparent. La formule (D) de Wronski, malheureusement laissée dans l'oubli, était capable de donner la solution avec autant de facilité que si elle eût été créée dans ce seul but.

17. *Premier exemple.* — Il s'agit de démontrer que, si l'on substitue

à  $x$  une nouvelle variable indépendante, définie par l'équation

$$x = e^u,$$

on obtient un résultat qui peut s'écrire sous cette forme symbolique,

$$e^u \frac{d^n y}{dx^n} = \left[ \frac{d}{du} - (n-1) \right] \left[ \frac{d}{du} - (n-2) \right] \dots \left[ \frac{d}{du} - 1 \right] \frac{dy}{du} \quad »$$

(*Traité de Calcul différentiel*, par J. Bertrand, 169-171).

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} (x)^{(1)} & (x^2)^{(1)} & \dots & (x^{n-1})^{(1)} & y^{(1)} \\ (x)^{(2)} & (x^2)^{(2)} & \dots & (x^{n-1})^{(2)} & y^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x)^{(n)} & (x^2)^{(n)} & \dots & (x^{n-1})^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}$$

devient ici

$$\begin{vmatrix} e^u & 2e^{2u} & \dots & (n-1)e^{(n-1)u} & y^{(1)} \\ e^u & 2^2 e^{2u} & \dots & (n-1)^2 e^{(n-1)u} & y^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^u & 2^n e^{2u} & \dots & (n-1)^n e^{(n-1)u} & y^{(n)} \end{vmatrix}.$$

On peut mettre  $e^u$  en facteur dans la première colonne,  $e^{2u}$  dans la deuxième, etc. Remarquant d'ailleurs que le déterminant est une fonction linéaire des éléments de la dernière colonne  $y^{(1)} \equiv \frac{dy}{du}$ ,  $y^{(2)} \equiv \frac{d^2 y}{du^2}$ , ..., et qu'on peut sans danger écrire symboliquement  $\frac{dy}{du}$ ,  $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ , ..., à condition de remplacer, dans le résultat final,  $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$  par  $\frac{d^2 y}{du^2}$ , il vient

$$\frac{1}{1.2\dots n} \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(e^u)^{1+2+\dots+(n-1)}}{1.1.2.1.2.3\dots(1.2\dots n)[e^u]^{1+2+\dots+(n-1)+n}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & \frac{dy}{du} \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & (n-1)^2 & \left(\frac{dy}{du}\right)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^n & 2^n & 3^n & \dots & (n-1)^n & \left(\frac{dy}{du}\right)^n \end{vmatrix}.$$

Le numérateur est un déterminant de Vandermonde; il est égal à

$$1.1.2.1.2.3\dots 1.2\dots(n-1) \left[ \frac{dy}{du} - (n-1) \right] \dots \left[ \frac{dy}{du} - 1 \right] \frac{dy}{du}.$$



Alors, par des réductions évidentes, on obtient [en remplaçant  $(e^u)^n$  par  $x^n$  et faisant passer ce terme dans le premier membre]

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[ \frac{d}{du} - (n-1) \right] \left[ \frac{d}{du} - (n-2) \right] \dots \left[ \frac{d}{du} - 1 \right] \frac{dy}{du}.$$

18. *Deuxième exemple :*

$$x = u^\mu,$$

$\mu$  étant un exposant quelconque, positif ou négatif.

On a, par la formule (D),

$$\frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} \mu u^{\mu-1} & 2\mu u^{2\mu-1} & \dots & (m-1)\mu u^{(m-1)\mu-1} & \frac{dy}{du} \\ \mu(\mu-1)u^{\mu-2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{1.1.2\dots 1.2\dots m (\mu u^{\mu-1})^{1+2+\dots+m}}.$$

Si l'on multiplie par  $u$  les éléments de la première ligne du déterminant, par  $u^2$  ceux de la deuxième, etc., ce qui revient à multiplier le déterminant par  $u^{1+2+\dots+m}$ , on peut mettre  $u^\mu$  en facteur dans la première colonne,  $u^{2\mu}$  en facteur dans la deuxième, etc.

Après réductions évidentes, il vient

$$\frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 2\mu & \dots & u \frac{dy}{du} \\ \mu(\mu-1) & 2\mu(2\mu-1) & \dots & u^2 \frac{d^2 y}{du^2} \\ \mu(\mu-1)(\mu-2) & 2\mu(2\mu-1)(2\mu-2) & \dots & u^3 \frac{d^3 y}{du^3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{1.1.2\dots 1.2\dots m \mu^{1+2+\dots+m} u^{\mu m}}.$$

Le résultat est donc de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = c_0 u^{m-\mu m} \frac{d^m y}{du^m} + c_1 u^{m-1-\mu m} \frac{d^{m-1} y}{du^{m-1}} + \dots$$

ou encore

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = c_0 u^m \frac{d^m y}{du^m} + c_1 u^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{du^{m-1}} + \dots,$$

$c_0, c_1, \dots$  étant des coefficients numériques.

Ces coefficients s'expriment en fonction de certains déterminants dont la loi de formation est très simple; si on les retrouve plus tard sous forme développée, on aura par cela même le développement de ces déterminants.

19. Quoique le déterminant (E) contienne un grand nombre de zéros, son développement direct paraît impraticable; c'est pourquoi j'ai cru bien faire de m'adresser à la théorie des intégrales définies prises entre des limites imaginaires (Chap. III) pour obtenir avec la plus grande facilité le développement explicite, sans terme inutile, de  $\frac{d^m y}{dx^m}$  en fonction de  $x', x'', \dots, x^{(m)}, y', y'', \dots, y^{(m)}$ .

J'avais achevé tous les calculs de ce Chapitre III, quand l'étude attentive du travail déjà analysé plus haut (n° 11), et intitulé : *Sur la différentiation des fonctions de fonctions, Séries de Burmann, de Lagrange, de Wronski*, par M. A... », m'a signalé un rapprochement inattendu entre des méthodes en apparence si différentes. L'auteur, comme je l'ai dit, termine ainsi :

$$\alpha \quad \vartheta = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

$$\frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\vartheta^{-n} F'(x+h)] = \frac{\Sigma [\pm D^1 \varphi(x) D^2 \varphi(x)^2 \dots D^{n-1} \varphi(x)^{n-1} D^n F(x)]}{1! 2! \dots n! [D \varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

» Ce beau théorème est dû à M. Wronski (*Philosophie de la Technie*, Section II, p. 110). »

Ce qui n'est pour l'auteur qu'un beau théorème devient pour nous une marche à suivre pour arriver au développement, sans terme inutile, du déterminant (D) de Wronski.

20. Il est facile de comprendre quelle doit être la démonstration à adopter.

On commence par remplacer dans le déterminant les quantités  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(x)^2$ , ... par  $\vartheta$ ,  $\vartheta^2$ , ... au moyen de la formule établie plus haut (11)

$$(\vartheta^p)^{(n-p)} = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-p)}{1 \cdot 2 \dots n} \{ \varphi(x) \}^p \{^{(n)}.$$

On remarque ensuite que de

$$(H) \quad \frac{1}{n!} \frac{d^n F(x)}{d\varphi(x)^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\vartheta^{-n} F'(x+h)]_{h=0}$$

on déduit, en observant que

$$\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m F(x+h)_0}{dh^m},$$

le développement

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n F(x)}{d\varphi(x)^n} = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}(\vartheta^{-n})_0}{dh^{n-1}} F'(x) + \frac{n-1}{1!} \frac{d^{n-2}(\vartheta^{-n})_0}{dh^{n-2}} F''(x) + \dots \right].$$

On est donc amené à multiplier les éléments de la dernière colonne du déterminant, qui sont  $F'(x)$ ,  $F''(x)$ , ..., respectivement par  $\frac{d^{n-1}(\vartheta^{-n})_0}{dh^{n-1}}$ ,  $\frac{n-1}{1!} \frac{d^{n-2}(\vartheta^{-n})_0}{dh^{n-2}}$ , ...

Je renvoie, pour le détail du calcul, à l'article de M. A..., d'où il est tiré.

21. Si j'avais trouvé au début cette formule (H) dans Wronski, au lieu de ne la reconnaître qu'après des applications multipliées, je n'en aurais très probablement rien su tirer. J'en donnerai pour preuve cet extrait de l'*Encyclopédie mathématique ou Exposition complète de toutes les branches des Mathématiques d'après les principes de la Philosophie des Mathématiques de Hoëné Wronski*, par A.-S. de Montferrier (t. III, p. 416-417-418).

« Or, lorsqu'on donne à la variable  $x$  une valeur quelconque  $a$  déterminée par la relation  $\varphi(x) = 0$ , les premiers membres ... sont les coefficients  $A_0, A_1, A_2, \dots$  de la série primitive

$$(52) \quad F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^2 + \dots$$

Ainsi ces coefficients auront pour expression générale, dans ce même cas de  $\varphi(a) = 0$ ,

$$(H) \quad (51) \quad A_\mu = \frac{1}{1^{\mu+1}} \left( \frac{d^{\mu+1} [\vartheta^{-\mu} F(x+z)]}{dz^{\mu+1}} \right);$$

mais, pour rendre cette expression indépendante de la variable  $z$ , qu'on doit faire égale à zéro après les différentiations, il suffit d'observer qu'en donnant à la variable  $x$  la valeur  $a$  et à la variable  $z$  la va-

leur zéro ou  $x = a$ , on a évidemment

$$\frac{d^p \Theta^n}{dz^p} = \left( \frac{d^p \left( \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x)}{z} \right)^n}{dz^p} \right) = \left( \frac{d^p \left( \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x} \right)^n}{dx^p} \right).$$

Ainsi, dans le cas de  $\varphi(a) = 0$ , qui est celui des valeurs des coefficients de la série (51), l'expression se réduit définitivement à

$$(H) \quad (54) \quad A_\mu = \frac{1}{1^{\mu+1}} \left\{ \frac{d^{\mu-1} \left( \left( \frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu \frac{dF(x)}{dx} \right)}{dx^{\mu-1}} \right\}_{x=a},$$

en indiquant par l'indice ( $x = a$ ) qu'il faut faire  $x = a$ , après les différentiations....

» Nous ferons observer que cette construction (54) des coefficients de la série primitive (52) présente déjà une anticipation sur le développement définitif, que donne la loi de Wronski

$$(E) \quad (47) \quad A_\mu = \frac{\mathfrak{W} [d^1 \varphi(x) d^2 \varphi(x)^2 d^3 \varphi(x)^3 \dots d^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1} d^\mu F(x)]}{\mathfrak{W} [d^1 \varphi(x) d^2 \varphi(x)^2 d^3 \varphi(x)^3 \dots d^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1} d^\mu \varphi(x)^\mu]}$$

des expressions initiales

$$(50) \quad \left( \frac{d^\mu F(x)}{dy^\mu} \right) = \left( \frac{d^{\mu-1} [\Theta^{-\mu} F(x+z)^{(1)}]}{dz^{\mu-1}} \right),$$

car on obtient immédiatement une génération relative de ces coefficients (50) en développant le coefficient général ci-dessus par la loi

$$(19) \quad d^m (F x f x) = F x d^m f(x) + m d F x d^{m-1} f x + \dots$$

qui est la loi fondamentale du Calcul différentiel. On a, en effet,

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{1^{\mu+1}} \left[ \frac{d^{\mu-1} \left[ \left( \frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu \frac{dF(x)}{dx} \right]}{dx^{\mu-1}} \right] \\ &= \frac{1}{1^{\mu+1}} \left\{ \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} \left( \frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu + \frac{\mu-1}{1} \frac{d^{\mu-1} F(x)}{dx^{\mu-1}} \frac{d \left( \frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu}{dx} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2} \frac{d^{\mu-2} F(x)}{dx^{\mu-2}} \frac{d^2 \left( \frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu}{dx^2} + \dots \right\}; \end{aligned} \right.$$

mais ce développement dépend d'une fonction auxiliaire  $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ , de sorte que, pour arriver à la génération absolue du coefficient général  $A_\mu$ , c'est-à-dire pour n'avoir plus dans ce développement (55) que les derniers termes ou les vrais éléments de la génération en question, il faudrait encore développer les différentielles

$$d\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^\mu, \quad d^2\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^\mu, \quad d^3\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^\mu, \quad \dots;$$

et, ce qui n'est pas le moindre inconvénient, comme, en faisant  $x=a$ , après les différentiations, on obtient des valeurs indéterminées  $\frac{0}{0}$ , il serait encore nécessaire, par des différentiations réitérées des numérateurs et des dénominateurs, d'arriver enfin aux derniers termes ou aux éléments  $d\varphi(x)$ ,  $d^2\varphi(x)$ ,  $d^3\varphi(x)$ , ..., dont la loi n'apparaît nullement au milieu de toutes ces opérations. Il n'en est pas ainsi de l'expression (47) ou (19); elle donne immédiatement les éléments de la construction des coefficients en question et présente ainsi la génération absolue de ces coefficients. A la vérité, il entre encore dans cette construction les différentielles des puissances de la fonction  $\varphi(x)$  et non les différentielles immédiates  $d\varphi(x)$ ,  $d^2\varphi(x)$ ,  $d^3\varphi(x)$ , ...; mais la loi qui donne les différentielles  $d^\mu\varphi x^m$ , moyennant les différentielles élémentaires  $d\varphi x$ ,  $d^2\varphi x$ ,  $d^3\varphi x$ , ..., n'est qu'une extension ou plutôt une transformation de la loi fondamentale (n° 19). »

## CHAPITRE II.

22. La formule qui donne la dérivée  $m^{\text{ième}}$  d'une fonction de fonction étant relativement simple, il y aura souvent avantage à se ramener à cette formule. Je rappelle d'abord quelques-unes des formes dont elle est susceptible :

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x),$$

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = (\dot{u})^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2} (\dot{u}^2)^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots m} (\dot{u}^m)^{(m)} \frac{d^m y}{du^m},$$

$$(A) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = [u - u_0]^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{[(u - u_0)^2]^{(m)}}{1.2} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{[(u - u_0)^m]^{(m)}}{1.2 \dots m} \frac{d^m y}{du^m},$$

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{d^m y}{dx^m} = A_1 \frac{dy}{du} + \frac{A_2}{1.2} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{A_m}{1.2 \dots m} \frac{d^m y}{du^m}, \\ A_p = (u^p)^{(m)} - \frac{p}{1} (u^{p-1})^{(m)} u + \dots + (-1)^{p-1} p (u)^{(m)} u^{p-1}; \end{cases}$$

$$(F) \quad \begin{cases} \frac{d^m y}{dx^m} = 1.2 \dots m \sum \frac{(u^{(1)})}{1.2 \dots h_1} \frac{\left[ \frac{u^{(2)}}{1.2} \right]}{1.2 \dots h_2} \dots \frac{\left[ \frac{u^{(p)}}{1.2 \dots p} \right]}{1.2 \dots h_p} \frac{d^p y}{du^p}, \\ h_1 + 2h_2 + \dots + \alpha h_\alpha = m, \quad h_1 + h_2 + \dots + h_\alpha = p. \end{cases}$$

Les applications étant assez nombreuses pour mériter un classement, je diviserai ce Chapitre en trois Parties.

Dans la première, j'utiliserai les formules pour plusieurs des fonctions élémentaires. Il deviendra évident que l'on ne peut être arrêté dans cette voie que si l'on a affaire à des fonctions dont les propriétés ne sont pas assez connues actuellement pour donner lieu à certaines transformations de calcul nécessaires dans tout problème.

Dans la deuxième Partie, je me bornerai à un seul exemple géométrique très simple et très important relatif aux courbes planes. J'indiquerai bien des formules pour le cas des courbes gauches, mais elles ne me paraissent pas encore arrivées à un degré de simplicité suffisant pour que je les transcrive.

Enfin, la dernière Partie sera destinée à montrer combien il est facile de généraliser la formule à deux points de vue différents.

### PREMIÈRE PARTIE.

#### 23. Premier exemple :

$$x = Lu, \text{ c'est-à-dire } u = e^x.$$

D'après la formule (B), on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} [(u - u_0)^p]^{(n)} \frac{1}{p!} \frac{d^p y}{du^p},$$

$$[(u - u_0)^p]^{(n)} = \left[ (u^p)^{(n)} - \frac{p}{1} (u^{p-1})^{(n)} u + \dots + (-1)^{p-1} p u^{(n)} u^{p-1} \right];$$

or

$$u = e^x, \quad (u^p)^{(n)} \equiv (e^{px})^{(n)} \equiv p^n e^{px}.$$

On a, par suite,

$$[(u - u_0)^p]^{(n)} = e^{px} \left[ p^n - \frac{p}{1} (p-1)^n + \dots + (-1)^{p-1} p 1^n \right];$$

d'où le résultat connu

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= 1^n u \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2} \left[ 2^n - \frac{2}{1} 1^n \right] u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \dots \\ &+ \frac{1}{1.2 \dots p} \left[ p^n - \frac{p}{1} (p-1)^n + \dots + (-1)^{p-1} p 1^n \right] u^p \frac{d^p y}{du^p} + \dots \end{aligned}$$

Avec la notation des différences, ce résultat prend une expression très simple,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\Delta^p 0^n}{1.2 \dots p} u^p \frac{d^p y}{du^p}$$

(*Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*, par M. Tisserand).

22. Deuxième exemple :

$$u = x^\mu, \quad x = u^{\frac{1}{\mu}}.$$

Nous avons déjà prouvé que le résultat était de la forme (n° 18)

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = c_0 u^m \frac{d^m y}{du^m} + c_1 u^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{du^{m-1}} + \dots$$

Il serait facile de vérifier ce résultat; je me bornerai à chercher de nouvelles expressions des coefficients  $c$ .

Sachant que, dans le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$ , qui est  $\frac{1}{1.2 \dots p} [(u - u_0)^p]^{(m)}$ ,

on peut mettre en facteur  $u_0^{p-\frac{m}{\mu}}$ , il suffira, pour avoir le coefficient numérique, de remplacer  $u_0$  par 1. On a une première forme du résultat

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} [(x^\mu - 1)^p]_{x=1}^{(m)} \frac{u^p \frac{d^p y}{du^p}}{1.2 \dots p}.$$

J'appliquerai cette forme du résultat à l'exemple très simple

$$u = x^2.$$

Le coefficient de  $u^{m-k} \frac{d^{m-k} y}{du^{m-k}}$  est égal à

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-k)} [(x^2-1)^{m-k}]_{x=1}^{(m)}.$$

Or  $x^2-1 = (x+1)(x-1)$  et pour  $x=1$ , le facteur  $x-1$  s'annulant, on a évidemment

$$\begin{aligned} [(x^2-1)^{m-k}]_1^{(m)} &\equiv [(x+1)^{m-k}(x-1)^{m-k}]_1^{(m)} \\ &= \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \\ &\quad \times (m-k)(m-k-1)\dots 1 \cdot (m-k)\dots(m-k-k+1) 2^{m-k-k} \\ &= \frac{m(m-1)\dots(m-2k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} 2^{m-2k} 1 \cdot 2 \dots (m-k). \end{aligned}$$

Les premiers termes de la formule manquant, on peut l'écrire, en renversant l'ordre des termes,

$$\begin{aligned} y &= f(u), \quad u = x^2, \\ \text{« } \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(u) + n(n-1)(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(u) \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(u) + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} (2x)^{n-2k} f^{(n-k)}(u) + \dots \text{ »} \end{aligned}$$

(*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 61.)

On peut encore transformer ainsi la formule qui précède :

$$\begin{aligned} [(x^2-1)^p]^{(m)} &\equiv \left( x^{2p} - \frac{p}{1} x^{2(p-1)} + \dots \right)^{(m)} \\ &\equiv \mu p (\mu p - 1) \dots (\mu p - m + 1) \\ &\quad - \frac{p}{1} \mu (p-1) [\mu (p-1) - 1] \dots [\mu (p-1) - m + 1] + \dots \end{aligned}$$

Adoptant les relations de Wronski, indiquées au début (n° 1)

$$\begin{aligned} \varphi(x)^m \xi &= \varphi(x) \varphi(x+\xi) \dots \varphi[x+(m-1)\xi], \\ \Delta_\xi f(x) &= f(x) - f(x-\xi), \end{aligned}$$

il vient

$$(\mu p)^{m-1} - \frac{p}{1} [\mu(p-1)]^{m-1} + \dots \equiv \Delta_\xi^p (\mu p)^{m-1},$$



en remarquant, bien entendu, que les différences sont prises pour l'accroissement  $\mu$  de la variable  $(\mu p)$ . Si l'on fait attention à cette particularité, on peut écrire

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\Delta^p (\mu p)^{m-1}}{1^{p-1}} u^p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Le cas le plus élémentaire est celui où l'égalité existe entre l'accroissement  $\mu$  des différences et l'accroissement  $-1$  de la factorielle  $(\mu p)^{m-1}$ . Utilisant alors cette formule très facile à vérifier

$$\Delta_{\xi}^{\mu} (a+x)^{m-1} = m^{\mu-1} \xi^{\mu} (a+x)^{m-\mu-1} \quad (1),$$

on a ce résultat simple :

$$u = x^{-1}, \quad x = u^{-1},$$

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{m^{p-1} (-1)^p (-p)^{m-p-1}}{1^{p-1}} u^p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour développer cette formule, il suffit de voir que

$$(-p)^{m-p-1} = (-1)^{m-p} p^{m-p-1},$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (-1)^m \sum_{p=1}^{p=m} \frac{m^{p-1} p^{m-p-1}}{1^{p-1}} \frac{1}{x^{m+p}} \frac{d^p y}{du^p} \quad (2).$$

Ce résultat n'est qu'un cas particulier de la transformation linéaire la plus générale, pour laquelle on obtient sans peine ce résultat :

$$u = \frac{ax+b}{a'x+b'} \quad y = f(u),$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = P_n \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} \frac{1}{P_p} \frac{p(p+1) \dots (n-1)}{1.2 \dots (n-p)} \frac{(ab' - ba')^p a'^{n-p}}{(a'x+b')^{n+p}} f^{(p)}(u).$$

Pour appliquer numériquement cette formule, il faut remarquer que  $\frac{p(p+1) \dots (n-1)}{1.2 \dots (n-p)}$  n'a plus de sens pour  $p = n$ , mais qu'il suffit de rem-

(1) *A. S.*, t. III, p. 274.

(2) Voir ce résultat dans le *Cours de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 61.

placer cette expression par 1 pour que la formule s'applique de  $p = 1$  à  $p = n$ , sans exception.

Je terminerai par une remarque qui me permettra d'utiliser la forme

$$(C) \quad \frac{d^m \gamma}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} (\dot{u}^p)^{(m)} \frac{d^p \gamma}{du^p}.$$

Cette forme se développe, comme on sait, par

$$(\dot{u}^p)^{(m)} = \sum \frac{P_m}{P_\alpha \dots P_\lambda} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} \dots u^{(\lambda)},$$

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = m.$$

Pour obtenir la formule (F) nous sommes partis de  $(u_1 u_2 \dots u_p)^{(m)}$  et nous avons été obligés (n° 9), ne voulant prendre chaque terme qu'une fois, de corriger le résultat dans le cas où l'on aurait par exemple  $\alpha = \beta$ . Ici, comme il ne s'agit que d'une application, et qu'il importe peu que l'on écrive plusieurs fois le même terme, pourvu que le résultat final soit exact, je n'aurai pas à tenir compte de cette correction; il suffira de partir du développement supposé effectué de  $(u_1 u_2 \dots u_p)^{(m)}$  et de faire ensuite  $u_1 = u_2 = \dots = u_p$ .

Cela posé, je considère le cas particulier où  $\mu$  est un nombre entier positif plus petit que  $m$ . Si  $p > \mu$ , il faudra supprimer dans le développement de  $(\dot{u}^p)^{(m)}$  non seulement les termes qui contiennent  $u^0 \equiv u$ , mais aussi ceux qui contiennent  $u^{(q)}$ ,  $q > \mu$ .

Pour ne prendre que les termes  $u_1^{(\alpha)} u_2^{(\beta)} \dots u_p^{(\lambda)}$  qui contiennent  $u_1, u_2, \dots, u_p$  au moins à la puissance 1, je remarque que tous ces termes sont divisibles par  $u_1 u_2 \dots u_p$ . Il reste alors

$$u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} \dots u_p^{\lambda-1} \equiv u_1^{\alpha'} u_2^{\beta'} \dots u_p^{\lambda'},$$

$$\alpha' + \beta' + \dots + \lambda' = n - p.$$

Il vient alors un polynôme homogène de degré  $n - p$  en  $u_1, u_2, \dots, u_p$  dans lequel, d'après la nature de la question, il ne faut prendre que les termes qui ne sont pas divisibles par des puissances données des variables  $u_1^\mu, u_2^\mu, \dots, u_p^\mu$ . On sait que, dans la théorie de l'élimination, on est amené à compter le nombre de ces termes et à le désigner par une no-

tation spéciale

$$\Delta_\mu \dots \Delta_\mu \Delta_\mu N(p, n-p).$$

(*Cours d'Algèbre supérieure*, par J. A. Serret, 4<sup>e</sup> édition, t. I, p. 68.)

25. *Troisième exemple :*

$$u = \sin x, \quad x = \arcsin u.$$

Si je pars de l'expression développée de

$$\frac{1}{1.2\dots p} (u^p)^{(m)},$$

comme on a

$$u' = \cos x, \quad u'' = -\sin x, \quad u^{(\alpha)} = \sin\left(x + \alpha \frac{\pi}{2}\right),$$

on voit que, si l'on écrit

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum A_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$A_p = \sum_{1.2\dots m} \frac{(\cos x)^{h_1}}{1.2\dots h_1} \frac{\left(\frac{-\sin x}{1.2}\right)^{h_2}}{1.2\dots h_2} \frac{\left(\frac{-\cos x}{1.2.3}\right)^{h_3}}{1.2\dots h_3} \dots \frac{\left(\frac{\sin\left(x + \alpha \frac{\pi}{2}\right)^{h_\alpha}}{1.2\dots \alpha}\right)}{1.2\dots h_\alpha},$$

$$h_1 + 2h_2 + \dots + \alpha h_\alpha = m, \quad h_1 + h_2 + \dots + h_\alpha = p,$$

et par suite

$$h_2 + 2h_3 + \dots + (\alpha - 1)h_\alpha = m - p,$$

Chaque terme étant de la forme  $C \cos^\beta x \sin^{p-\beta} x$ , le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  est forcément de la forme

$$a_0 \cos^p x + a_1 \cos^{p-1} x \sin x + \dots + a_p \sin^p x.$$

On verra plus loin que ce coefficient peut aussi s'exprimer en fonction de  $\sin qn$  et de  $\cos qn$ .

26. *Quatrième exemple :*

$$x = \arccot u, \quad u = \cot x.$$

On sait que, si l'on désigne par  $C, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$  certains coefficients

numériques, on a

$$\cot^{n+1} x = C + A_0 \cot x + A_1 \frac{d \cot x}{dx} + \dots + A_n \frac{d^n \cot x}{dx^n}.$$

(*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 337, 338).

Inversement on peut résoudre par rapport à  $\frac{d \cot x}{dx}$ , ...,  $\frac{d^n \cot x}{dx^n}$  les équations du premier degré

$$\begin{aligned} \frac{d \cot x}{dx} &= -1 - \cot^2 x, \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 \cot x}{dx^2} &= \cot x - \cot^3 x, \\ \frac{1}{6} \frac{d^3 \cot x}{dx^3} - \frac{d \cot x}{dx} &= \frac{1}{3} - \cot^4 x, \\ &\dots\dots\dots \\ A_n \frac{d^n \cot x}{dx^n} + \dots + A_1 \frac{d \cot x}{dx} &= -C - A_0 \cot x + \cot^{n+1} x. \end{aligned}$$

Le dénominateur commun est une constante ; par suite, le numérateur ne contient  $x$  que dans sa dernière colonne. Développant suivant les éléments de cette colonne et ordonnant, on aura

$$\frac{d^n \cot x}{dx^n} = a_0 \cot^{n+1} x + a_1 \cot^n x + \dots + a_n \cot x + a_{n+1}.$$

Or

$$\begin{aligned} (u^p)^{(n)} &= \sum \frac{P_n}{P_\alpha \dots P_\lambda} u^{(\alpha)} \dots u^{(\lambda)} \quad (\alpha + \dots + \lambda = n), \\ u^{(\alpha)} &= a_0 \cot^{\alpha+1} x + a_1 \cot^\alpha x + \dots \equiv a_0 u^{\alpha+1} + a_1 u^\alpha + \dots \end{aligned}$$

Pour former  $(u^p)^{(n)}$ , on aurait à multiplier des polynômes entiers de degrés  $\alpha + 1$ ,  $\beta + 1$ , ...,  $\lambda + 1$  ; il viendra un polynôme de degré  $\alpha + 1 + \beta + 1 + \dots = n + p$ . Le résultat rentrera dans ce type simple

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} (B_0 u^{n+p} + B_1 u^{n+p-1} + \dots + B_{n+p}) \frac{d^p y}{du^p}.$$

27. *Cinquième exemple :*

$$u = \lambda(x), \quad x = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Je m'appuierai sur le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \alpha \frac{k^{2n} \lambda^{2n+1}(z)}{2n+1} &= \frac{\alpha_n}{1} \lambda(z) + \frac{\alpha_{n-1}^{(3)}}{1.2.3} \lambda''(z) + \dots \\ &+ \frac{\alpha_1^{(2n-1)}}{1.2 \dots (2n-1)} \lambda^{(2n-2)}(z) + \frac{1}{1.2 \dots (2n+1)} \lambda^{(2n)}(z) \quad (1) \end{aligned}$$

Cette formule permet de déterminer les dérivées d'indices pairs de  $u$  en fonction de  $u, u^2 \dots$  au moyen des équations du premier degré

$$\begin{aligned} u^{(2n)} + A_1 u^{(2n-2)} + \dots + A_{n-1} u^{(2)} &= B u + C u^{2n+1}, \\ u^{(2n-2)} + \dots &= B' u + C' u^{2n-1}, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

On tire de là, en remarquant que le dénominateur des inconnues est égal à 1 et que le numérateur ne contient qu'une seule colonne où entre l'inconnue  $u$ , colonne par rapport aux éléments de laquelle on développera,

$$u^{(2n)} = u(d_0 + d_1 u^2 + \dots + d_n u^{2n}).$$

Pour les dérivées d'indices impairs, je prends la dérivée de la formule qui a servi de point de départ

$$k^{2n} \lambda^{2n}(z) \lambda'(z) = \frac{\alpha_n}{1} \lambda'(z) + \frac{\alpha_{n-1}^{(3)}}{1.2.3} \lambda''(z) + \dots + \frac{1}{1 \dots (2n+1)} \lambda^{(2n+1)}(z).$$

On peut regarder  $\lambda'(x)$  ou  $u'$  comme une quantité connue, puisque

$$\lambda'(x) = \mu(x) \nu(x) = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

et alors on a

$$\begin{aligned} u^{(2n+1)} + A_1 u^{(2n-1)} + \dots + A_{n-1} u^{(3)} &= u'(B + C u^{2n}), \\ u^{(2n-1)} + \dots &= u'(B' + C' u^{2n-2}), \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

d'où

$$u^{(2n+1)} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} (e_0 + e_1 u^2 + \dots + e_n u^{2n}).$$

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, par MM. Briot et Bouquet, 2<sup>e</sup> édition, n° 285, p. 464.  
Ann. de l'Éc. Normale. 3<sup>e</sup> Série. Tome II. — MAI 1886.

Revenant maintenant au calcul,

$$(u^p)^{(m)} = \sum \frac{P_m}{P_\alpha \dots P_\lambda} u^{(\alpha)} \dots u^{(\lambda)}, \quad \alpha + \beta + \dots + \lambda = m.$$

Si  $m$  est pair, un nombre pair de quantités  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  est impair d'après la relation  $\alpha + \beta + \dots + \lambda = m$ ; donc, pas de radical. Si  $m$  est impair, un nombre impair des quantités  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  est impair; on a donc le radical en facteur.

Si maintenant,  $m$  étant pair,  $p$  est aussi pair, le nombre des quantités  $\alpha, \dots$  impaires étant pair, il en reste un nombre pair qui sont paires, puisqu'elles doivent être en nombre  $p$ , d'après la convention indiquée par  $u$ . On n'a que  $u^2$  comme inconnue.

En résumé, on a les types suivants :

$$\begin{aligned} m = 2\mu \dots \dots \dots & (h_0 + h_1 u^2 + \dots + h u^{m+2p}) \frac{d^{2p} y}{du^{2p}} \\ & (k_0 + h_1 u^2 + \dots + k u^{m+2p}) u \frac{d^{2p+1} y}{du^{2p+1}}, \\ m = 2\mu + 1 \dots \dots & \sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)} (h_0 + h_1 u^2 + \dots + h u^{m+2p-2}) u \frac{d^{2p} y}{du^{2p}} \\ & \sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)} (k_0 + k_1 u^2 + \dots + k u^{m+2p-1}) \frac{d^{2p+1} y}{du^{2p+1}}. \end{aligned}$$

## DEUXIÈME PARTIE.

28. Je désignerai les coordonnées d'une courbe plane quelconque par

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$

$s$  étant l'arc compté à partir d'une certaine origine. Appelant  $\omega$  l'inverse du rayon de courbure et  $u$  l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des  $x$ , on sait que

$$\frac{dx}{ds} \equiv \varphi'(s) = \cos u, \quad \frac{du}{ds} = \omega.$$

Le développement de  $x$  et de  $y$  de la courbe suivant les puissances

croissantes de l'arc exige la connaissance des coefficients

$$M = \left( \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} \right)_0, \quad N = \left( \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}} \right)_0.$$

On sait, d'ailleurs, qu'il s'agit d'exprimer ces coefficients en fonction de  $\omega, \frac{d\omega}{ds}, \dots$

Je rappellerai aussi que l'on a, si  $u = 0$  pour  $s = 0$ ,

$$\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} = M \cos u + N \sin u,$$

$$\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}} = -M \sin u + N \cos u.$$

Je calculerai, par exemple,  $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$ . Le résultat relatif à  $y$  s'en déduit immédiatement.

La formule (C) donne immédiatement

$$\frac{d^n(\cos u)}{ds^n} = (\dot{u})^{(n)} \frac{d \cos u}{du} + \frac{1}{1.2} (\dot{u}^2)^{(n)} \frac{d^2 \cos u}{du^2} + \dots$$

ou bien encore, puisque  $\cos u = \frac{dx}{ds}$ ,

$$\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} = -(\dot{u})^{(n)} \sin u - \frac{(\dot{u}^2)^{(n)}}{1.2} \cos u + \frac{(\dot{u}^3)^{(n)}}{1.2.3} \sin u + \frac{(\dot{u}^4)^{(n)}}{1.2.3.4} \cos u - \dots$$

Alors, en désignant par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$   $q$  entiers positifs non nuls, on a

$$\begin{aligned} (\dot{u}^q)^{(n)} &= \sum \frac{P_n}{P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \dots P_{\lambda_q}} u_1^{(\lambda_1)} u_2^{(\lambda_2)} \dots u_q^{(\lambda_q)} \\ &= \sum \frac{P_n}{P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \dots P_{\lambda_q}} \omega^{(\lambda_1-1)} \omega^{(\lambda_2-1)} \dots \omega^{(\lambda_q-1)} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q = n. \end{array} \right.$$

Si l'on veut écrire séparément  $M$  et  $N$ ,

$$M = -\frac{(\dot{u}^2)^{(n)}}{1.2} + \frac{(\dot{u}^4)^{(n)}}{1.2.3.4} - \frac{(\dot{u}^6)^{(n)}}{1.2.3.4.5.6} + \dots,$$

$$N = -\frac{(\dot{u})^{(n)}}{1} + \frac{(\dot{u}^3)^{(n)}}{1.2.3} - \frac{(\dot{u}^5)^{(n)}}{1.2.3.4.5} + \dots$$

*Application numérique.* — Je prendrai, par exemple,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -(\dot{u})^{(4)} \sin u - \frac{(\dot{u}^2)^{(4)}}{1.2} \cos u + \frac{(\dot{u}^3)^{(4)}}{1.2.3} \sin u + \frac{(\dot{u}^4)^{(4)}}{1.2.3.4} \cos u.$$

Pour  $(u^2)^{(4)}$ , on a à résoudre en nombres entiers  $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$ , ce qui donne (la valeur 0 n'étant pas admissible), soit  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ , soit  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ , soit  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ . J'écrirai donc, pour abréger,

$$(\dot{u}^2)^{(4)} = [4u_1^1 u_2^3 + 4u_1^3 u_2^1 + 6u_1^2 u_2^2] = 8u' u'' + 6(u'')^2,$$

$$(\dot{u}^3)^{(4)} = \frac{P_4}{P_2} [u_1 u_2 u_3^2 + u_2 u_3 u_1^2 + u_3 u_1 u_2^2] = (1.2.3)^2 (u')^2 u',$$

$$(\dot{u}^4)^{(4)} = 1.2.3.4 (u')^4,$$

d'après le lemme du n° 3. Il en résulte donc, en introduisant, au lieu de  $u$ , l'inverse du rayon de courbure  $\omega = u'$ ,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = [-4\omega\omega'' - 3\omega'^2 + \omega^4] \cos u + [-\omega''' + 6\omega^2\omega'] \sin u,$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -[-4\omega\omega'' - 3\omega'^2 + \omega^4] \sin u + [-\omega''' + 6\omega^2\omega'] \cos u.$$

29. Si l'on considère maintenant un point mobile, qui décrive la courbe plane, les projections de l'accélération d'ordre  $n$  sur les axes seront

$$\frac{d^n x}{dt^n} = G \cos u + H \sin u,$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -G \sin u + H \cos u,$$

$G$  et  $H$  étant des fonctions de  $\omega, \omega', \dots$  et de  $v = \frac{ds}{dt}, v', \dots$

On a d'abord

$$\frac{d^n x}{dt^n} = (\dot{s})^{(n)} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{1.2} (\dot{s}^2)^{(n)} \frac{d^2 x}{ds^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} (\dot{s}^n)^{(n)} \frac{d^n x}{ds^n}.$$

Si l'on tient compte des valeurs obtenues dans le paragraphe précédent pour  $\frac{dx}{ds}, \frac{d^2 x}{ds^2}, \dots$ ,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = (\dot{s})^{(n)} \cos u + \dots + \frac{(\dot{s}^p)^{(n)}}{1.2 \dots p} \left[ -(\dot{u})^{(p-1)} \sin u - \frac{(\dot{u}^2)^{(p-1)}}{1.2} \cos u + \dots \right] + \dots$$



ou encore

$$\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} = & \left\{ (\dot{s})^{(n)} - \frac{(\dot{s}^2)^{(n)}}{1.2.3} \left[ \frac{(\dot{u}^2)^{(2)}}{1.2} \right] - \frac{(\dot{s}^3)^{(n)}}{1.2.3.4} \left[ \frac{(\dot{u}^2)^{(3)}}{1.2} \right] - \frac{(\dot{s}^3)^{(n)}}{1.2.3.4.5} \left[ \frac{(\dot{u}^2)^{(4)}}{1.2} - \frac{(\dot{u}^4)^{(4)}}{1.2.3.4} \right] \dots \right\} \cos u \\ & + \left\{ - \frac{(\dot{s}^2)^{(n)}}{1.2} (\dot{u}^1)^{(1)} - \frac{(\dot{s}^3)^{(n)}}{1.2.3} \frac{(\dot{u}^1)^{(2)}}{1} - \frac{(\dot{s}^4)^{(n)}}{1.2.3.4} \left[ \frac{(\dot{u}^1)^{(3)}}{1} - \frac{(\dot{u}^3)^{(3)}}{1.2.3} \right] \dots \right\} \sin u. \end{aligned}$$

Je n'écris pas les derniers termes de la parenthèse  $(\dot{s}^p)^n, \dots$  parce qu'il peut se présenter deux cas différents, ce qui compliquerait l'écriture de la formule générale. Dans un exemple particulier il ne peut y avoir aucune difficulté. On s'arrêtera quand on sera conduit à écrire  $(\dot{s}^{n+1})^n$ . Dans la parenthèse qui multiplie  $(\dot{s}^p)^n$ , savoir

$$\frac{(\dot{u}^2)^{(p-1)}}{1.2} - \frac{(\dot{u}^4)^{(p-1)}}{1.2.3.4} + \dots$$

ou bien

$$\frac{(\dot{u}^1)^{(p-1)}}{1} - \frac{(\dot{u}^3)^{(p-1)}}{1.2.3} + \dots,$$

on s'arrêtera aussi quand on sera conduit à écrire

$$(\dot{u}^{p-1+q})^{(p-1)} \equiv 0.$$

*Application numérique.* — On veut obtenir

$$\frac{d^k x}{dt^k} = G \cos u + H \sin u, \quad \frac{d^k y}{dt^k} = -G \sin u + H \cos u.$$

La formule se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{d^k x}{dt^k} = & \left[ (\dot{s})^{(k)} - \frac{(\dot{s}^2)^{(k)}}{1.2.3} \frac{(\dot{u}^2)^{(2)}}{1.2} - \frac{(\dot{s}^4)^{(k)}}{1.2.3.4} \frac{(\dot{u}^2)^{(3)}}{1.2} \right] \cos u \\ & - \left\{ \frac{(\dot{s}^2)^{(k)}}{1.2} \frac{(\dot{u}^1)^{(1)}}{1} + \frac{(\dot{s}^3)^{(k)}}{1.2.3} \frac{(\dot{u}^1)^{(2)}}{1} + \frac{(\dot{s}^4)^{(k)}}{1.2.3.4} \left[ \frac{(\dot{u}^1)^{(3)}}{1} - \frac{(\dot{u}^3)^{(3)}}{1.2.3} \right] \right\} \sin u. \end{aligned}$$

D'après des calculs déjà faits (28),

$$\begin{aligned} (\dot{s})^{(k)} &= \frac{d^k v}{dt^k}, & (\dot{s}^2)^{(k)} &= 8v \frac{d^2 v}{dt^2} + 6 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2, \\ (\dot{s}^3)^{(k)} &= 36v^2 \frac{dv}{dt}, & (\dot{s}^4)^{(k)} &= 1.2.3.4.v^4, \\ (\dot{u}^2)^{(2)} &= 1.2.\omega^2, & (\dot{u}^2)^{(3)} &= 6\omega\omega', & (\dot{u}^3)^{(3)} &= 1.2.3.\omega^3; \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} G &= \frac{d^3 v}{dt^3} - 6v^2 \frac{dv}{dt} \omega^2 - 3v^4 \omega \omega', \\ -H &= \left[ 4v \frac{d^2 v}{dt^2} + 3 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \omega + 6v^2 \frac{dv}{dt} \omega' + v^4 (\omega' - \omega^3). \end{aligned}$$

### TROISIÈME PARTIE.

30. La formule générale relative aux fonctions de fonctions est

$$\begin{aligned} v &= f(u), \quad u = \varphi(x), \\ (C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} &= (v)^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2} (v^2)^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots \end{aligned}$$

Une première manière de la généraliser consiste à examiner le cas où

$$v = \chi(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x).$$

La méthode, déjà indiquée dans les articles signalés plus haut de M. A., ancien élève de l'École Polytechnique, n° 11, et de M. E. Cesaro, n° 12, consiste à remarquer que la formule (C) donne successivement

$$\begin{aligned} \frac{d^m y}{dx^m} &= (v)^m \frac{dy}{dv} + \frac{(v^2)^{(m)}}{1.2} \frac{d^2 y}{dv^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots m} (v^m)^{(m)} \frac{d^m y}{dv^m}, \\ \frac{d^p y}{dv^p} &= (v)^{(p)} \frac{dy}{du} + \frac{(v^2)^{(p)}}{1.2} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{(v^p)^{(p)}}{1.2 \dots p} \frac{d^p y}{du^p}. \end{aligned}$$

On obtient donc, en remplaçant dans l'expression de  $\frac{d^m y}{dx^m}$  les dérivées  $\frac{dy}{dv}$ ,  $\frac{d^2 y}{dv^2}$ , ... par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} \frac{d^m y}{dx^m} &= \sum_{p=1}^{p=m} A_p \frac{d^p y}{du^p}, \\ A_p &= \frac{(v^p)^{(m)}}{1.2 \dots p} \frac{(v^p)^{(p)}}{1.2 \dots p} + \frac{(v^{p+1})^{(m)}}{1.2 \dots (p+1)} \frac{(v^p)^{(p+1)}}{1.2 \dots p} \\ &\quad + \frac{(v^{p+2})^{(m)}}{1.2 \dots (p+2)} \frac{(v^p)^{(p+2)}}{1.2 \dots p} + \dots \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\frac{(\dot{u}^p)^{(k)}}{1.2\dots p} = \Phi_{k,p}, \quad \frac{(\dot{v}^p)^{(k)}}{1.2\dots p} = \Psi_{k,p},$$

on obtient

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} (\Phi_{p,p} \Psi_{m,p} + \Phi_{p+1,p} \Psi_{m,p+1} + \dots) \frac{dp y}{du^p}.$$

On retrouve ainsi un résultat très peu différent de celui que M. E. Cesaro déduit de ses formules isobariques (*Nouvelles Annales*, p. 62, février 1885).

31. Le cas le plus simple est celui où l'on a

$$y = u, \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x).$$

Il ne s'agit alors, comme précédemment (n° 28), que d'un changement de la fonction  $y$ , la variable indépendante  $x$  étant conservée. J'examinerai seulement ce cas très simple

$$y = u^{-1}, \quad u = \varphi(x);$$

on a

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = (\dot{u})^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{(\dot{u}^2)^{(m)}}{1.2} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{(\dot{u}^m)^{(m)}}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{du^m},$$

d'où

$$(u^{-1})^{(m)} = -\frac{(\dot{u})^{(m)}}{u^2} + \frac{(\dot{u}^2)^{(m)}}{u^3} + \dots + (-1)^m \frac{(\dot{u}^m)^{(m)}}{u^{m+1}}.$$

J'appliquerai cette formule au cas  $m = 4$ , qui n'exigera aucun calcul nouveau. On a trouvé (n° 28)

$$(\dot{u}^2)^{(4)} = 8u' u'' + 6(u'')^2, \quad (\dot{u}^3)^{(4)} = 36(u')^2 u'', \quad (\dot{u}^4)^{(4)} = 24(u')^4,$$

$$(u^{-1})^{(4)} = -\frac{u^{(4)}}{u^2} + \frac{8u'' u' + 6(u'')^2}{u^3} - 36 \frac{(u')^2 u''}{u^4} + 24 \frac{(u')^4}{u^5}.$$

Ayant fait ici le calcul avec la convention  $\dot{u}$ , je crois utile de remarquer qu'il est facile de s'en dispenser dans le problème actuel,

$$(u^{-1})^{(m)} = -\frac{(\dot{u})^{(m)} u^{m-1} + (\dot{u}^2)^{(m)} u^{m-2} + \dots + (-1)^m (\dot{u}^m)^{(m)}}{u^{m+1}}.$$

Or, d'après cette remarque, très importante et sur laquelle j'ai déjà insisté, que le but est seulement de supprimer les termes en  $u$ , on a

$$(u^p)^{(m)} \equiv [(u - u_0)^p]^{(m)} \equiv (u^p)^{(m)} - \frac{p}{1} (u^{p-1})^{(m)} u + \frac{p(p-1)}{1.2} (u^{p-2})^{(m)} u^2 - \dots$$

Le numérateur de  $(u^{-1})^{(m)}$  peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} & - (u)^{(m)} u^{m-1} + [(u^2)^{(m)} - 2(u)^{(m)} u] u^{m-2} \\ & - [(u^3)^{(m)} - 3(u^2)^{(m)} u + 3(u)^{(m)} u^2] u^{m-3} + \dots \\ & + (-1)^m [(u^m)^{(m)} - \frac{m}{1} (u^{m-1})^{(m)} u + \dots + (-1)^{m-1} \frac{m}{1} (u)^{(m)} u^{m-1}]. \end{aligned}$$

Les quantités  $(u)^{(m)}$ ,  $(u^2)^{(m)}$ , ... ayant pour coefficients les sommes des coefficients de la formule du binôme, il vient

$$(u^{-1})^{(m)} = - \frac{m(m+1)}{1.2} \frac{u^{(m)}}{u^2} + \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3} \frac{(u^2)^{(m)}}{u^3} - \dots$$

Cette formule, contenant un plus grand nombre de termes que la précédente, qui disparaîtraient dans les réductions, peut donner des calculs plus longs dans un exemple numérique. Dans un exemple théorique, elle sera souvent plus avantageuse, l'hypothèse  $u$  étant difficile à réaliser *a priori*. Je me bornerai à un seul exemple pour justifier ce point de vue.

### 32. Exemple :

$$y = \sec x \equiv (\cos x)^{-1}.$$

On a d'abord

$$\frac{d^m \sec x}{dx^m} = - \frac{m(m+1)}{1.2} \frac{(\cos x)^{(m)}}{\cos^3 x} + \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3} \frac{(\cos^2 x)^{(m)}}{\cos^3 x} - \dots$$

Il semble difficile de donner l'expression algébrique du second membre en fonction seulement de  $\sin x$  et de  $\cos x$ . On a, en effet, à exprimer

$$(\cos^p x)^{(m)}.$$

Je rappellerai la formule

$$2^{p-1} \cos^p x = \cos p x + \frac{p}{1} \cos(p-2)x + \dots$$

Elle permet de remplacer  $\cos^p x$  en fonction de  $\cos px$ ,  $\cos(p-2)x$ , ..., ce qui permet de trouver l'expression algébrique de la dérivée  $m^{\text{ième}}$ . On pourrait ensuite revenir des cosinus des multiples de l'arc au sinus et au cosinus de l'arc lui-même.

Je n'insisterai pas sur ce calcul, me bornant à remarquer qu'il conduirait à la solution d'une autre question plus importante :

$$\begin{aligned}\frac{d^m \tan x}{dx^m} &\equiv \frac{d^m}{dx^m} [\sin x \cos x^{-1}] \\ &= \frac{d^m \sin x}{dx^m} \cos x^{-1} + \frac{m}{1} \frac{d^{m-1} \sin x}{dx^{m-1}} \frac{d(\cos x^{-1})}{dx} + \dots\end{aligned}$$

33. La formule de Maclaurin, qui a servi de fondement à toutes les formules précédentes, s'étend si facilement au cas de plusieurs variables indépendantes, que je crois inutile de démontrer qu'elle donnerait (4)

$$\begin{aligned}z &= f(u, v), \quad u = \psi(x, y), \quad v = \theta(x, y), \\ (C) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^m z}{dx^p dy^q} &= (\dot{u})^{(m)} \frac{dz}{du} + (\dot{v})^{(m)} \frac{dz}{dv} \\ &+ \frac{1}{1.2} \left[ (\dot{u}^2)^{(m)} \frac{d^2 z}{du^2} + 2(\dot{u}\dot{v})^{(m)} \frac{d^2 z}{du dv} + (\dot{v}^2)^{(m)} \frac{d^2 z}{dv^2} \right] + \dots \\ &+ \frac{1}{1.2 \dots m} \left[ (\dot{u}^m)^{(m)} \frac{d^m z}{du^m} + \frac{m}{1} (\dot{u}^{m-1} \dot{v})^{(m)} \frac{d^m z}{du^{m-1} dv} + \dots \right], \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

le symbole  $(\dot{u}^\alpha \dot{v}^\beta)^{(m)}$  signifiant qu'on forme

$$\frac{d^m u^\alpha v^\beta}{dx^p dy^q}$$

et qu'on supprime dans le développement tous les termes qui contiennent  $u^0 \equiv u$ ,  $v^0 \equiv v$ .

D'après les explications données au début, il suffit d'écrire, en permutant  $u$  et  $x$ ,  $v$  et  $y$ ,

$$\frac{d^m z}{du^p dv^q} = (\dot{x})^{(m)} \frac{dz}{dx} + (\dot{y})^{(m)} \frac{dz}{dy} + \dots$$

et de donner successivement à  $p$  et  $q$  toutes les valeurs entières et positives (zéro non excepté), telles que  $p+q=m$ ,  $p+q=m-1$ , ...,  $p+q=1$  pour avoir un nombre d'équations du premier degré suffi-

sant pour donner, sous forme de quotient de déterminants, l'expression de  $\frac{d^m z}{dx^p dy^q}$  en fonction de  $(x^\alpha y^\beta)^q$  et de  $\frac{d^q z}{du^\alpha dv^\beta}$ .

Je n'écrirai pas, à cause de sa longueur, cette formule qui se déduit presque immédiatement des déterminants (D) et (E) du Chapitre I. J'observerai, cependant, que la méthode suivie dès le début a l'avantage de s'appliquer sans modification au cas de plusieurs variables.

34. *Exemple.* — Pour montrer que la formule (C) généralisée n'est pas inapplicable, je retrouverai, en m'appuyant sur elle, un résultat connu

$$z = \varphi(xy) \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = \gamma x + \delta y, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{d^2 z}{dx'^2} \alpha^2 + 2 \frac{d^2 z}{dx' dy'} \alpha \gamma + \frac{d^2 z}{dy'^2} \gamma^2, \\ \frac{d^2 z}{dx dy} &= \frac{d^2 z}{dx'^2} \alpha \beta + \frac{d^2 z}{dx' dy'} (\alpha \delta + \beta \gamma) + \frac{d^2 z}{dy'^2} \gamma \delta, \\ \frac{d^2 z}{dy^2} &= \frac{d^2 z}{dx'^2} \beta^2 + 2 \frac{d^2 z}{dx' dy'} \beta \delta + \frac{d^2 z}{dy'^2} \delta^2 \end{aligned}$$

» (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 87). »

Je rappelle d'abord la formule

$$\frac{d^m z}{dx^p dy^q} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{1}{1.2 \dots \lambda} \left[ (\dot{u}^\lambda)^{(m)} \frac{d^\lambda z}{du^\lambda} + \frac{\lambda}{1} (\dot{u}^{\lambda-1} \dot{v})^{(m)} \frac{d^\lambda z}{du^{\lambda-1} dv} \dots \right],$$

dans laquelle

$$(\dot{u}^\mu \dot{v}^{\lambda-\mu})^{(m)} = \frac{d^m (\dot{u}^\mu \dot{v}^{\lambda-\mu})}{dx^p dy^q}.$$

Or ici, comme  $u = \alpha x + \beta y$ ,  $v = \gamma x + \delta y$ ,

$$(u)^{(2)} = (v)^{(2)} = (u)^{(3)} = (v)^{(3)} = \dots = 0;$$

on ne peut prendre que l'hypothèse  $\lambda = m$ . Comme les seules dérivées qui interviennent,  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $v'_x$ ,  $v'_y$ , sont des constantes, on réalisera très simplement l'hypothèse  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  en faisant  $x = y = 0$  dans le résultat, ou encore en ne considérant que le terme en  $x^p y^q$ .

Il suffit donc de prendre dans chaque produit  $u^\mu v^{m-\mu}$  le coefficient de  $x^p y^q$  que l'on multipliera par  $1.2\dots p.1.2\dots q$ .

On a

$$u^\mu = \alpha^\mu x^\mu + \frac{\mu}{1} \alpha^{\mu-1} \beta x^{\mu-1} y + \dots,$$

$$v^{m-\mu} = \gamma^{m-\mu} x^{m-\mu} + \frac{m-\mu}{1} \gamma^{m-\mu-1} \delta x^{m-\mu-1} y + \dots$$

Il est bon toutefois de remarquer que la première formule est illusoire pour  $\mu = 0$ , la deuxième pour  $\mu = m$ . Si l'on veut obtenir pour les coefficients du binôme une expression qui subsiste même dans ces deux cas particuliers, il n'y a qu'à adopter les conventions énoncées par M. Serret dans son *Algèbre supérieure* (4<sup>e</sup> édition, n° 66)

$$N(n, m) = \frac{1.2\dots(n+m)}{1.2\dots n.1.2\dots m},$$

$$N(0, m) = 1,$$

$$N(n, 0) = 1,$$

$$N(0, 0) = 1. \quad »$$

On obtient

$$u^\mu v^{m-\mu} = \sum x^p y^q \left\{ \alpha^\mu \frac{(m-\mu)\dots[m-\mu-(m-p-1)]}{1.2\dots(m-p)} \gamma^{p-\mu} \delta^{m-p} \right. \\ \left. + \frac{\mu}{1} \alpha^{\mu-1} \beta \frac{(m-\mu)\dots[m-\mu-(m-p-2)]}{1.2\dots(m-p-1)} \gamma^{p-\mu+1} \delta^{m-p-1} + \dots \right\}.$$

Remarquons que, si  $\mu > p$ , le premier terme de la parenthèse n'existe pas. On le reconnaîtra dans une application particulière en convenant de supprimer tous les termes où l'une des lettres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  aurait un exposant négatif; ici l'on aurait, si  $p > \mu$ ,  $\gamma^{-(p-\mu)}$ , et l'on n'écrit pas ce terme.

En résumé, il vient

$$\frac{d^m z}{dx^p dy^q} = \alpha^p \beta^q \frac{d^m z}{du^m} + \gamma^p \delta^q \frac{d^m z}{dv^m} \\ + \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{1.2\dots p.1.2\dots q}{1.2\dots \mu.1.2\dots(m-\mu)} \left[ \alpha^\mu \gamma^{p-\mu} \delta^{m-p} \frac{(m-\mu)\dots(p+1-\mu)}{1.2\dots(m-p)} + \dots \right] \frac{d^m z}{du^\mu dv^{m-\mu}}.$$

Si l'on prend le cas particulier de

$$m = 2,$$

c'est-à-dire

$$p + q = 2, \quad \mu = 1,$$

on a d'abord, pour  $p = 2, q = 0$ ,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \alpha^2 \beta^0 \frac{d^2 z}{du^2} + \gamma^2 \delta^0 \frac{d^2 z}{dv^2} + \frac{1 \cdot 2}{1} [\alpha \gamma + 0] \frac{d^2 z}{du dv},$$

et ensuite, pour  $p = 1, q = 1$ ,

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \alpha \beta \frac{d^2 z}{du^2} + \gamma \delta \frac{d^2 z}{dv^2} + 1 [\alpha \delta + \beta \gamma] \frac{d^2 z}{du dv}.$$

Il est, je crois, inutile d'insister pour prouver qu'on retrouve très simplement le cas particulier indiqué, après avoir résolu préalablement la question générale dont il dépend.

(A suivre.)





Soient

$S$  une surface gauche;

$A$  une de ses génératrices;

$A'$  et  $A''$  deux positions consécutives à  $A$  de la génératrice;

$\mu$  un point quelconque de  $A$ .

La droite  $A$  est évidemment osculatrice à  $S$ , c'est-à-dire qu'elle la rencontre en plus de deux points consécutifs; le plan tangent à la surface  $S$  au point  $\mu$  passera donc par  $A$ , quelle que soit la position de  $\mu$  sur cette génératrice. La droite qui passe par  $\mu$  et qui s'appuie sur  $A'$  et  $A''$ , contenant trois points infiniment voisins de la surface, sera la seconde osculatrice et déterminera avec  $A$  le plan tangent en  $\mu$  à  $S$  <sup>(1)</sup>. Réciproquement, un plan quelconque  $M$  mené par  $A$  sera tangent à  $S$  en un point de cette génératrice, et la droite tracée dans le plan  $M$  par les points où il coupe  $A'$  et  $A''$  rencontrera  $A$  au point de contact  $\mu$ . Il est donc évident que, le long de la génératrice  $A$ , tout point  $\mu$  détermine un seul plan  $M$  tangent à  $S$ , et que tout plan  $M$ , passant par  $A$ , détermine sur cette génératrice un seul point de contact  $\mu$ . La série de points  $\mu$  et le faisceau de plans  $M$  forment donc deux figures projectives.

On sait que tout le système des couples d'éléments correspondants de deux figures projectives est complètement déterminé si l'on donne trois couples d'éléments correspondants. Supposons donc que l'on donne trois points  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  de la génératrice  $A$  et les plans tangents correspondants  $M_1, M_2, M_3$ .

Pour étudier la relation qui lie les points  $\mu$  de  $A$  aux plans  $M$ , imaginons un plan  $P$  perpendiculaire à  $A$ . Le plan  $P$  coupera le faisceau de plans  $M$  suivant un faisceau de droites  $m$ ; le faisceau  $m$  et le faisceau  $M$  sont projectifs et égaux, la division des points  $\mu$  et le faisceau  $m$  sont donc projectifs, et on peut les mettre en perspective dans un plan quelconque passant par  $A$ , c'est-à-dire les placer de manière que chaque rayon  $m_n$  du faisceau  $m$  passe par le point correspondant  $\mu_n$  de  $A$ .

L'angle des deux rayons  $m_n$  et  $m_{n'}$  du faisceau  $m$  mesure l'angle des

---

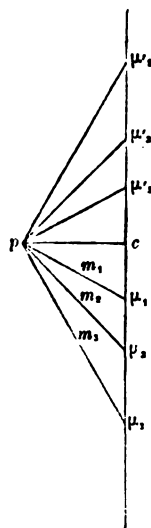
<sup>(1)</sup> CREMONA, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, p. 41.

plans tangents  $M_n, M_n'$ ; donc, après la mise en perspective, les rayons  $m$  forment entre eux des angles égaux aux angles que forment entre eux les plans tangents à  $S$  aux points  $\mu$ , où ils coupent  $A$ .

Pour mettre la division  $\mu$  et le faisceau  $m$  en perspective, décrivons sur  $\mu, \mu_2$ , dans un plan quelconque passant par  $A$ , un segment capable de l'angle  $m_1 m_2$ , et sur  $\mu_2 \mu_3$  un segment capable de l'angle  $m_2 m_3$ . Ces deux segments se couperont en un point  $p$  qui sera le centre du faisceau  $m$  mis en perspective avec  $A$ .

Ne considérons plus maintenant que la figure du plan  $pA$ . Du point  $p$  abaissons une perpendiculaire  $pc$  sur  $A$  et faisons tourner le rayon  $m$  autour de  $p$  de gauche à droite, à partir de  $pc$ , de manière à lui faire occuper successivement les positions  $m_1, m_2, m_3, \dots$  (fig. 1) qui déter-

Fig. 1.



minent sur  $A$  les points  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ ; les angles  $\mu_1 pc, \mu_2 pc, \mu_3 pc$  vont en augmentant à mesure que le point  $\mu$  s'éloigne vers l'infini, et prennent toutes les valeurs de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ . Si la rotation continue, le point  $\mu$  revient de l'infini en passant par les points  $\mu_1', \mu_2', \mu_3', \dots$  pour atteindre  $c$ , et les angles des plans tangents correspondants avec le plan tangent en  $c$  varient de  $-90^\circ$  à  $-0^\circ$ . Donc, si l'on fait abstraction

des signes, les plans tangents à  $S$  en des points également éloignés de  $c$  font des angles égaux avec le plan tangent en  $c$ .

Cette symétrie justifie les noms de *point central* donné au point  $c$  par Chasles et de *plan central* donné au plan tangent en  $c$  par Bour. Nommons, en outre, *centre perspectif* de  $A$  par rapport à  $S$  le point  $p$ , et rappelons que la longueur  $pc$  a été nommée *paramètre de la génératrice* par Chasles <sup>(1)</sup>.

Il résulte de ce que nous venons de dire que :

- 1° *La projection du centre perspectif sur la génératrice correspondante est le point central de la génératrice;*
- 2° *Le plan central est normal au point à l'infini;*
- 3° *La tangente trigonométrique de l'angle du plan tangent à  $S$  en un point de  $A$  avec le plan central est proportionnelle à la distance de ce point au point central.*

Si l'on nomme  $\varphi$  l'angle de ces deux plans,  $p$  la longueur  $pc$  et  $l$  la distance au point  $c$  du point de contact, on a

$$\text{tang } \varphi = \frac{l}{p};$$

si, par le point  $p$ , on élève une perpendiculaire à  $p\mu$ , elle coupera  $A$  en un point  $\mu'$ , le plan tangent en  $\mu$  est normal en  $\mu'$ . Les points  $\mu$  et  $\mu'$  forment une involution dont les points doubles sont imaginaires et dont le point  $c$  est le point central. La droite  $p\mu'$  a été nommée la *droite auxiliaire* de  $\mu$  par M. Mannheim dans son Mémoire sur les pinceaux de droites <sup>(2)</sup>.

Donc : *les droites auxiliaires de tous les points d'une génératrice passent par le centre perspectif.*

Si du point central comme centre, dans un plan perpendiculaire à  $A$  et avec le paramètre de la génératrice comme rayon, nous décrivons une circonférence, ses points jouiront de cette propriété que, *de chacun d'eux, on voit un segment  $\mu_n \mu_n'$  de  $A$  sous un angle égal à celui des plans tangents à  $S$  en  $\mu_n$  et  $\mu_n'$ .*

<sup>(1)</sup> DE LA GOURNERIE, *Géométrie descriptive*, II<sup>e</sup> Partie, p. 144.

<sup>(2)</sup> *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1872.

Dans un plan passant par la génératrice  $A$ , il y a deux centres perspectifs symétriques par rapport à  $A$ ; ils correspondent à des paramètres de la génératrice de signes contraires.

2. Supposons que deux surfaces gauches  $S_1$  et  $S_2$  aient une génératrice commune  $A$ . A tout plan  $M$ , passant par  $A$ , correspondent un point  $\mu$  de contact avec  $S_1$ , et un point  $\nu$  de contact avec  $S_2$ . Les points  $\mu$  et  $\nu$  forment deux divisions involutives, les plans tangents aux points doubles  $e$  et  $l$  de ces divisions sont communs aux deux surfaces.

Donc : *deux surfaces gauches, qui ont une génératrice commune, sont tangentes l'une à l'autre en deux points de cette génératrice qui peuvent être réels, distincts ou coïncidents, ou imaginaires.*

3. Nous allons chercher maintenant dans quels cas ces points de contact sont réels et distincts, réels et coïncidents, ou imaginaires.

Nous allons supposer d'abord que les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  ont le même plan central. Soient  $p_1$  et  $p_2$  les centres perspectifs de ces deux surfaces relativement à leur génératrice commune  $A$ , ces points étant pris dans le plan central commun; soit aussi  $O$  le point d'intersection de la droite  $p_1 p_2$  avec  $A$ .

Prenons un point quelconque  $\mu$  sur  $A$ , l'angle  $p_1 \mu p_2$  est égal à  $p_2 \mu c_2 - p_1 \mu c_1$ , ou égal à  $90^\circ - \mu p_2 c_2 - (90^\circ - \mu p_1 c_1)$ , ou encore

$$p_1 \mu p_2 = \mu p_1 c_1 - \mu p_2 c_2.$$

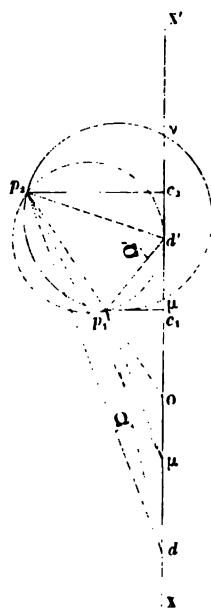
Si nous convenons de compter les angles des plans tangents, en un même point  $\mu$  de  $A$ , à partir du plan tangent à  $S_1$ , l'angle  $p_1 \mu p_2$  est égal et de signe contraire à celui des plans tangents (*fig. 2*) quand le point  $\mu$  de  $A$  est sur  $OX$ ; il est égal à cet angle, et de même signe que lui, si le point  $\mu$  est sur  $OX'$ .

Par les trois points  $\mu$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  faisons passer une circonférence : elle coupe la génératrice  $A$  en un second point  $\nu$ , et les angles des plans tangents en  $\mu$  et en  $\nu$  sont égaux et de même signe. Les points  $\mu$  et  $\nu$  forment une involution sur  $A$ , le point  $O$  est le point central de cette involution. Soient  $d$  et  $d'$  ses points doubles ( $d$  étant sur  $OX$ ,  $d'$  sur  $OX'$ ); les circonférences  $d p_1 p_2$ ,  $d' p_1 p_2$  sont tangentes à  $A$  en  $d$  et  $d'$ .

Supposons maintenant que le point  $\mu$  parcourt la génératrice  $A$  en

partant du point à l'infini sur  $OX$  et se dirigeant vers le point à l'infini sur  $OX'$  en passant par  $O$ . L'angle des plans tangents en  $\mu$  aux deux surfaces est d'abord nul; puis il croît jusqu'à ce que  $\mu$  atteigne le point  $d$ ; ensuite il décroît quand  $\mu$ , quittant  $d$ , se rapproche de  $O$ , où l'angle devient de nouveau nul. Quand  $\mu$  continue son mouvement

Fig. 2.



sur  $OX'$ , l'angle des plans tangents change de signe, et sa grandeur absolue croît et atteint son maximum quand  $\mu$  arrive en  $d'$ ; puis cette grandeur absolue décroît jusqu'à ce que  $\mu$  parvienne à l'infini, où elle est de nouveau nulle.

Ainsi, en valeur absolue, l'angle des plans tangents, en un même point de  $A$ , a deux maxima : l'un d'eux correspond au point  $d$ , nous le nommerons  $\Omega$ ; l'autre  $\Omega'$  correspond au point  $d'$ . Les maxima  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont de signes contraires.

Nous avons supposé jusqu'ici que les plans centraux des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  se confondent en un seul; imaginons maintenant que l'on fasse tourner la surface  $S_2$  autour de  $A$  dans le sens positif jusqu'à ce que les plans centraux fassent un angle  $\gamma_1$ . L'angle du plan tangent à  $S_2$ , en

un point quelconque  $\mu$  avec le plan tangent en  $\mu$  à  $S_1$  est augmenté de  $\eta$ . Si donc nous nommons  $\varepsilon$  le nouvel angle des plans tangents, en un même point de  $A$ , à  $S_1$  et à  $S_2$ , on aura

$$\varepsilon - \eta = p_1 \mu p_2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \eta + p_1 \mu p_2.$$

L'angle  $p_1 \mu p_2$  doit être pris avec son signe, qui est négatif quand  $\mu$  se trouve sur  $OX$  et qui est positif quand  $\mu$  est sur  $OX'$ . Nous pourrions donc ne considérer que les valeurs absolues de l'angle  $p_1 \mu p_2$ , à la condition d'employer la formule

$$\varepsilon = \eta - p_1 \mu p_2$$

quand  $\mu$  est sur  $OX$ , et la formule

$$\varepsilon = \eta + p_1 \mu p_2$$

quand  $\mu$  est sur  $OX'$ .

Supposons que  $\mu$  parte du point à l'infini sur  $OX$  et se dirige vers  $O$ . L'angle  $\varepsilon$ , d'abord égal à  $\eta$ , décroît et atteint son minimum quand  $\mu$  est en  $d$ , où l'angle devient  $\eta - \Omega$ ; puis cet angle croît et devient de nouveau  $\eta$  quand  $\mu$  est en  $O$ . Au delà,  $\varepsilon$  croît d'une manière continue jusqu'à  $\eta + \Omega'$ , puis décroît jusqu'à  $\eta$ . Donc :

Si  $\eta < \Omega$ , il y a deux points sur  $OX$  où l'angle  $\varepsilon$  est nul.

Si  $\eta = \Omega$ , ces deux points se confondent en un seul.

Si  $\eta > \Omega$ , les points de contact n'existent plus.

Pour construire les points de contact, il suffit de tracer sur  $p_1 p_2$  un segment capable de l'angle  $-\eta$  : ses points d'intersection avec la génératrice  $A$  donnent les deux points de contact.

Il est important de remarquer que nous avons supposé les centres perspectifs situés d'un même côté de  $A$ , ou, ce qui revient au même, que les paramètres de  $A$  par rapport à  $S_1$  et à  $S_2$  sont de même signe, ou encore que les plans tangents à  $S_1$  et à  $S_2$  en un même point  $\mu$  de  $A$  tournent dans le même sens quand  $\mu$  se déplace. Dans le cas contraire, il est très facile de voir que les points de contact des surfaces sont toujours réels. On peut énoncer les théorèmes suivants :

*Si deux surfaces gauches  $S_1$  et  $S_2$ , ayant une génératrice commune  $A$ , sont telles que leurs plans tangents, en un même point  $\mu$  de  $A$ , tournent en*

sens contraire quand le point  $\mu$  se déplace, elles se touchent toujours en deux points réels de A.

Si leurs plans tangents en un point  $\mu$  tournent dans le même sens quand  $\mu$  se déplace, ces deux surfaces se touchent en deux points réels et distincts si  $\eta < \Omega$ ; en deux points réels et coïncidents, si  $\eta = \Omega$ ; en deux points imaginaires, si  $\eta > \Omega$  dans le cas où l'angle  $\eta$  de leurs plans centraux est positif. Dans le cas où  $\eta$  est négatif, les points de contact sont réels, distincts ou coïncidents, ou imaginaires, selon que l'on a

$$\eta < \Omega', \quad \eta = \Omega', \quad \eta > \Omega'.$$

Rappelons que  $\Omega$  est le plus grand angle négatif des plans tangents à  $S_1$  et  $S_2$  aux mêmes points de A et que  $\Omega'$  est leur plus grand angle positif, quand les plans centraux font un angle nul.

Si l'on veut trouver les points où les plans tangents aux surfaces en des points de A font un angle à  $\varphi$ , il suffit de décrire sur  $p_1 p_2$  un segment capable de l'angle  $\varphi - \eta$ .

4. Si l'on fait tourner l'une des surfaces,  $S_2$  par exemple, autour de A, les points de contact se déplacent et forment une involution qui a précisément pour points doubles les points de contact qui correspondent à  $\eta = \Omega$ .

5. Nommons  $e$  et  $l$  les points de contact, sur A, des deux surfaces gauches  $S_1$  et  $S_2$  (fig. 3)

$$p_1 e p_2 = p_1 l p_2 = \eta;$$

donc :

*La distance qui sépare les centres perspectifs des deux surfaces gauches  $S_1$  et  $S_2$ , qui ont une génératrice commune, est vue des points de A où les surfaces sont tangentes l'une à l'autre sous un angle égal à l'angle des plans centraux des surfaces.*

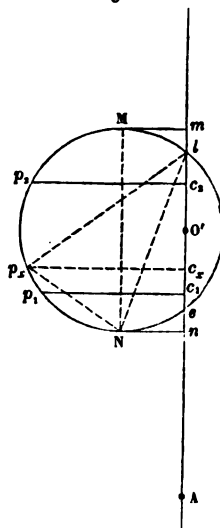
6. On voit aussi que :

*La distance qui sépare les points de contact de deux surfaces gauches sur leur génératrice commune est vue des centres perspectifs des deux surfaces sous un angle égal à celui des plans tangents aux deux points de contact des surfaces.*

7. Il résulte de ce dernier théorème que :

*Toutes les surfaces gauches qui ont une génératrice commune A, et qui sont tangentes en deux points fixes e et l de A à l'une d'elles  $S_1$ , ont leurs centres perspectifs sur la circonférence qui passe par les points e et l et par le centre perspectif  $p_1$  de A par rapport à  $S_1$ .*

Fig. 3.



8. Désignons une quelconque de ces surfaces par  $S^{el}$  et menons à la circonférence des centres perspectifs  $elp_1$ , les tangentes  $Mm$  et  $Nn$  perpendiculaires à A et coupant cette droite en  $m$  et  $n$ .

*Les points centraux de A par rapport à toutes les surfaces  $S^{el}$  seront compris entre les points  $m$  et  $n$ , qui sont toujours réels.*

9. L'angle  $MeN$  mesure l'angle des plans centraux des surfaces  $S^{el}$  qui ont  $m$  et  $n$  pour points centraux; donc :

*Les plans centraux des surfaces  $S^{el}$  qui ont les points limites  $m$  et  $n$  pour points centraux sont rectangulaires.*

10. Nommons  $2d$  la distance des points limites des points centraux des surfaces  $S^{el}$  et traçons le diamètre  $lp_n$  de la circonférence des centres perspectifs; le triangle  $elp_n$  donne

$$el = 2d \sin \varepsilon;$$



donc :

*La distance qui sépare les points de contact communs sur A, à toutes les surfaces  $S^{el}$  est égale à la distance des points limites des points centraux de ces surfaces multipliée par le sinus de l'angle des plans tangents communs.*

On a donc toujours  $el < mn$ .

11. On voit aussi que :

*Parmi les surfaces  $S^{el}$ , celles qui ont le plus grand paramètre pour la génératrice A ont leur point central en O' à égale distance des points e et l.*

12. *Parmi les surfaces  $S^{el}$ , celles qui ont le même paramètre pour A ont leurs points centraux à égale distance de O'.*

13. Considérons toujours un système de surfaces gauches  $S^{el}$  (fig. 3) ayant une génératrice commune A et toutes tangentes entre elles aux points fixes e et l de A; leurs points centraux ont pour points limites m et n. Supposons que l'on veuille trouver le point central  $c_x$  des surfaces  $S_x^{el}$  dont le plan central fait un angle  $\eta$  avec le plan central correspondant au point limite m.

Prenons sur A un point B comme origine, et posons

$$Bc_x = x, \quad Bm = l_1 \quad \text{et} \quad Bn = l_2.$$

Le centre perspectif correspondant à  $c_x$  sera sur la circonférence des centres perspectifs, en  $p_x$ , sur la perpendiculaire élevée en  $c_x$  à A. Nous savons que

$$\eta = p_x l M = p_x N M;$$

le triangle  $p_x N M$  donne  $MN = \frac{p_x N}{\cos \eta}$ , mais  $p_x N = \frac{c_x n}{\cos \eta}$ , donc

$$MN = \frac{c_x n}{\cos^2 \eta}.$$

Remplaçons MN par  $l_2 - l_1$ ,  $c_x n$  par  $l_2 - x$ , nous aurons

$$l_2 - l_1 = \frac{l_2 - x}{\cos^2 \eta}, \quad \text{d'où} \quad x = l_2 \sin^2 \eta + l_1 \cos^2 \eta.$$

Cette relation est semblable à celle qui lie les plus courtes distances d'un rayon aux rayons infiniment voisins d'un pinceau et qui est due à Hamilton.

Cette analogie n'est pas la seule que l'on remarque entre les théorèmes démontrés dans cette étude et ceux que donne la théorie des pinceaux de rayons <sup>(1)</sup>. Nous nous proposons de revenir sur ce sujet.

*Addition.* — Nous avons vu (I) que le point central de la génératrice  $A$  d'une surface gauche  $S$  est la projection, sur cette génératrice, de son centre perspectif, et que le plan tangent à  $S$  au point central  $c$  est le plan central. Les plans tangents à  $S$  en des points de  $A$  également éloignés de  $c$  sont également inclinés sur le plan central. Il résulte de là que *le point central de  $A$  est aussi le pied de la plus courte distance entre  $A$  et la génératrice infiniment voisine  $A'$ .*

Nous avons vu aussi (7) que les surfaces gauches  $S$ , ayant une génératrice commune  $A$ , qui sont tangentes entre elles aux points fixes  $e$  et  $l$  de  $A$ , ont leurs centres perspectifs sur une circonférence passant par les points  $e$  et  $l$ . Les surfaces dont les centres perspectifs sont aux points  $e$  et  $l$  ont leur paramètre nul et, par suite, ont même plan tangent en tous les points de  $A$ . Cela veut dire que la génératrice infiniment voisine de  $A$  coupe cette génératrice, et le point d'intersection est le point central.

Cela posé, soient une surface quelconque  $\Sigma$ ,  $a$  un de ses points. Par le point  $a$  traçons une courbe quelconque sur  $\Sigma$ ; la surface engendrée par les normales à  $\Sigma$  aux points de cette courbe est généralement une surface gauche qui a reçu le nom de *normalie*. Et, si l'on trace sur  $\Sigma$  des courbes passant par le point  $a$ , les normales dont ces courbes sont les directrices sont des surfaces gauches  $S$ , qui ont une génératrice commune, la normale  $A$  à  $\Sigma$  au point  $a$ .

Pour étudier ces surfaces, imaginons une quadrique  $Q$  osculatrice à  $\Sigma$  en  $a$ , les normalies couperont  $Q$  suivant des courbes osculées en  $a$  par leurs directrices, et la normale à  $\Sigma$  au point infiniment voisin de  $a$  d'une des directrices sera aussi normale à la quadrique  $Q$ .

La droite polaire, par rapport à  $Q$ , d'une droite quelconque  $A$  passant par  $a$  est située dans le plan tangent à  $Q$  en  $a$ ; c'est la droite d'intersection des plans tangents à  $Q$  aux deux points où  $A$  coupe cette quadrique.

Prenons deux points quelconques  $a$  et  $a'$  sur  $Q$ , la droite polaire

---

<sup>(1)</sup> Voir ma traduction de la *Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes*, par M. Kummer, insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIX, XX. et t. I. 2<sup>e</sup> série.

de  $aa'$ , par rapport à  $Q$ , sera l'intersection des plans tangents à  $Q$  en  $a$  et en  $a'$ ; et, si les normales à  $Q$  en  $a$  et  $a'$  se coupent, la droite polaire de  $aa'$  sera perpendiculaire à  $aa'$ ; et, réciproquement, si la droite polaire de  $aa'$  est perpendiculaire à cette droite, les normales à  $Q$  en  $a$  et  $a'$  se rencontrent.

Supposons maintenant que les points  $a$  et  $a'$  soient des points infiniment voisins de  $Q$ , la droite  $aa'$  sera une tangente à  $Q$  et à  $\Sigma$  en  $a$ . Si nous imaginons que le point  $a'$  infiniment voisin de  $a$  se déplace sur la surface  $\Sigma$ , la droite  $aa'$  sera toujours tangente à  $\Sigma$  en  $a$ , et à chacune des positions de la droite  $aa'$  correspondra une droite polaire située dans le même plan tangent en  $a$ . Réciproquement, à une droite tracée dans le plan tangent en  $a$ , considérée comme droite polaire, correspondra une seule droite  $aa'$ . Ces couples de droites formeront donc deux faisceaux en involution ayant même centre  $a$ .

Nous savons que ces faisceaux involutifs ont toujours deux rayons correspondants rectangulaires. Les normales à  $\Sigma$  aux points infiniment voisins de  $a$ , déterminés par ces deux directions rectangulaires, couperont donc la normale  $A$  en deux points  $e$  et  $l$ . Les courbes tracées sur  $\Sigma$  tangentielllement à ces directions donnent donc des normales qui sont tangentes entre elles aux deux points  $e$  et  $l$ . Ces points sont les centres perspectifs des plans tangents rectangulaires et *toutes les normales qui ont la droite  $A$  pour génératrice commune ont leurs centres perspectifs sur la circonférence décrite sur  $el$  comme diamètre* (<sup>1</sup>). Donc :

*Les normales qui ont pour directrices les courbes tracées, à partir d'un point  $a$ , sur une surface quelconque  $\Sigma$ , sont tangentes entre elles aux points  $e$  et  $l$  de la normale en  $a$  à  $\Sigma$ , et leurs plans tangents en ces points sont rectangulaires.*

Ces théorèmes donnent l'explication des analogies signalées plus haut et montrent toute l'importance de la théorie des centres perspectifs dans l'étude des surfaces et des pinceaux de rayons.

---

(<sup>1</sup>) Si l'on veut construire le centre perspectif des normales dont les directrices sont tangentes à une droite  $aX$ , faisant un angle  $\varphi$  avec la trace du plan tangent en  $a$  sur le plan tangent à  $\Sigma$  en  $a$ , il suffit de décrire sur  $ae$  un segment capable de l'angle  $\varphi$ . Son intersection avec la circonférence  $el$  donnera le point cherché.

---

# RECHERCHES

## SUR

# QUELQUES SÉRIES SEMI-CONVERGENTES,

PAR M. TH. STIELTJES.

---

### INTRODUCTION.

Nous allons indiquer en quelques mots le but et les principaux résultats de ce travail qui est consacré à l'étude de quelques séries semi-convergentes, en considérant exclusivement les valeurs réelles et positives de la variable.

On rencontre souvent, en Mathématiques, des développements de la forme

$$(A) \quad F(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \dots,$$

que l'on ne pourrait continuer indéfiniment s'il s'agissait d'un calcul numérique, la série étant divergente. Néanmoins un tel développement a un sens précis et l'on doit regarder la formule (A) comme une manière symbolique d'exprimer que, pour  $a = \infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim F(a) &= m_0, \\ \lim a[F(a) - m_0] &= m_1, \\ \lim a^2 \left[ F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a} \right] &= m_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ce sont les développements qui présentent ce caractère que nous avons en vue. Si l'on veut se servir de la formule (A) pour évaluer

$F(a)$ , on ne pourra le faire d'une manière sûre, qu'après une discussion du terme complémentaire qu'il faut ajouter à un nombre fini de termes. Mais cette discussion présente presque toujours de très grandes difficultés, si, du moins, on ne veut se contenter d'évaluations trop grossières qui auraient peu d'utilité, et c'est seulement dans quelques cas où les coefficients  $m_0, m_1, m_2, \dots$  suivent une loi simple qu'on a pu faire cette discussion.

Notamment on a trouvé, dans plusieurs cas où les coefficients sont alternativement positifs et négatifs, que la valeur exacte de  $F(a)$  est comprise toujours entre la somme de  $n$  et de  $n + 1$  termes de la série, et l'on a introduit, précisément à l'occasion des séries qui présentent cette circonstance particulière, le nom de *série semi-convergente*. Mais, comme nous venons de l'indiquer, nous avons pris ce terme dans une acception plus générale, et nous avons étudié aussi quelques cas dans lesquels les coefficients  $m_0, m_1, \dots$  ont tous même signe.

Pour abrégé, nous désignerons par *série semi-convergente de première espèce*, ou même simplement par *série de première espèce*, une série telle que (A), dans laquelle le signe des coefficients est alternativement positif et négatif, pour réserver le nom de *série de seconde espèce* au cas où les coefficients ont même signe.

Les cas de séries de seconde espèce qu'on a déjà traités semblent assez rares, et à la vérité nous n'en avons rencontré qu'un seul dû à M. Schlömilch et sur lequel nous reviendrons. Mais les séries de seconde espèce donnent lieu à quelques remarques générales que nous allons développer, en envisageant pour plus de précision la série suivante, que l'on rencontre dans l'étude du logarithme intégral :

$$\begin{aligned} \text{li}(e^a) &= e^a \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1 \cdot 2}{a^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{a^{n-1}} + R_n \right] \\ &= e^a [T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n + R_n]. \end{aligned}$$

Supposons  $a$  très grand : les termes diminuent d'abord pour croître ensuite au delà de toute limite. Soit  $T_n$  le plus petit terme, alors les termes  $T_{n-1}, T_{n-2}, \dots, T_{n-k}$  diffèrent très peu de  $T_n$  et

$$R_{n-k} = T_{n-k+1} + \dots + T_n + R_n.$$

On voit par là qu'au moins une des quantités  $R_{n-k}, R_n$  surpassera en

aisément en observant que la ligne dont l'équation serait  $y = R_n$  doit présenter un point d'inflexion dans le voisinage de  $n = N$ , parce qu'on se trouve en même temps dans le voisinage du minimum de  $T_n = R_{n-1} - R_n$ .

La solution approchée de l'équation  $R_n = 0$  se présente toujours sous la forme

$$(B) \quad n = \alpha a + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \dots;$$

mais souvent il est plus commode de considérer  $a$  comme inconnue, et de calculer d'abord les coefficients  $\beta, \beta_0, \dots$  du développement

$$(C) \quad a = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots$$

On en déduit ensuite facilement le développement (B). Ces séries (B) et (C) présentent le même caractère que la série (A); nous calculons quelques-uns des premiers coefficients : ces coefficients ne suivent aucune loi simple et leur calcul devient bientôt très pénible. Il paraît donc que nous avons réduit ainsi la discussion de la série (A) au problème beaucoup plus compliqué de discuter la série (B). Mais évidemment on ne demande qu'avec une approximation assez faible la racine de  $R_n = 0$ , et, comme l'exactitude de la formule (B) croît nécessairement lorsque  $n$  augmente, il suffit de se rendre compte par un calcul numérique de l'approximation de ces formules (B) et (C), en attribuant à  $a$  ou à  $n$  des valeurs beaucoup plus petites que celles pour lesquelles on se servira de la série semi-convergente donnée. L'approximation obtenue est toujours largement suffisante.

Comme nous l'avons dit, nous considérons la solution approchée de  $R_n = 0$  comme le problème principal à résoudre dans le cas d'une série de seconde espèce. Nous obtenons cette solution en considérant en particulier le reste  $R_n$  d'un terme  $T_n$  dans le voisinage du plus petit terme, et en développant  $R_n$  lui-même en série semi-convergente suivant les puissances descendantes de  $n$ . Dans quelques cas où l'on aurait besoin d'une exactitude exceptionnelle, on pourrait se servir de ce développement pour calculer avec une grande exactitude la valeur de  $R_n$ .

Mais, dans la plupart des cas, on n'aura pas à continuer la série jus-

qu'au point où  $R_n$  change de signe, car on obtiendrait ainsi une approximation beaucoup trop grande. On peut souhaiter alors de savoir quelle est à peu près l'erreur en s'arrêtant à un terme quelconque.

Très souvent les termes que l'on calcule diminuent si rapidement, que l'on peut négliger le reste; au besoin on calculerait avec une approximation plus grande qu'on n'en a besoin. Et dans le cas où l'on serait obligé de pousser le calcul si loin que les termes ne diminuent plus rapidement, alors la connaissance exacte du terme où il faut arrêter le développement permettra facilement d'évaluer approximativement les termes négligés.

Dans le cas des séries de première espèce, on a ordinairement cherché à déterminer le plus petit terme; mais on peut aussi envisager (comme on l'a déjà fait) la question d'une manière un peu différente et rétablir ainsi, jusqu'à un certain point, l'analogie avec les séries de seconde espèce.

Soit

$$T_1 - T_2 + \dots \pm T_n \mp R_n$$

une telle série,  $T_1, T_2, \dots, T_n, R_n$  étant positifs. Remarquons d'abord que la circonstance que  $R_n$  est positif entraîne déjà nécessairement que  $R_n$  est inférieur à  $T_n$  et à  $T_{n+1}$ ; car la relation

$$R_{n-1} + R_n = T_n$$

montre que  $R_{n-1}$  et  $R_n$  sont inférieurs à  $T_n$ .

Maintenant, au lieu de chercher le plus petit terme, on peut se proposer de trouver le minimum de  $R_n$ , en sorte qu'on est conduit à considérer l'équation transcendante

$$\frac{dR_n}{dn} = 0,$$

qu'on pourra remplacer aussi avec approximation par  $R_{n-1} = R_n$ .

La valeur de  $n$  qu'on en tire diffère très peu du rang du plus petit terme, circonstance qui permet d'expliquer la remarque suivante qu'on a faite dans quelques cas particuliers. Supposons que la racine de  $\frac{dR_n}{dn} = 0$  tombe entre  $n - 1$  et  $n$ . Alors on aura, d'une manière approchée,  $R_{n-1} = R_n$ , et l'erreur sera seulement une fraction faible de  $R_n$ . On en

conclut qu'on a aussi à peu près  $R_n = \frac{1}{2} T_n$ , en sorte que l'erreur de l'expression

$$T_1 - T_2 + \dots \pm T_{n-1} \mp \frac{1}{2} T_n$$

sera seulement une petite fraction de  $T_n$ , qui est d'autant plus faible que  $n$  est plus grand. Ajoutons qu'on peut aussi, dans le cas actuel, développer  $R_n$  en série semi-convergente, suivant les puissances descendantes de  $n$ ; le premier terme de ce développement montre alors qu'on a

$$\lim R_n : T_n = \frac{1}{2}$$

pour  $n = \infty$ .

Voici maintenant les séries dont nous avons fait l'étude. Nous avons peu insisté sur les séries de première espèce. Le logarithme intégral nous a fourni le premier exemple d'une série de seconde espèce. Nous considérons ensuite les transcendentes  $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du$ ,  $\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2} du$ , qui donnent aussi des séries de seconde espèce. On a choisi ces intégrales, parce que le résultat auquel on est conduit nous est utile encore dans la suite.

Nous arrivons maintenant à un exemple tiré de la théorie de la fonction  $\Gamma$ . Après avoir rappelé en quelques mots le résultat principal des nombreuses recherches auxquelles a donné lieu l'étude de la série qui sert à calculer  $\log \Gamma(a)$ , nous considérons une autre série, n'ayant rien à ajouter à un sujet qui est si bien exposé dans la première Partie du travail de M. Bourguet sur les intégrales eulériennes. La considération de  $\log \Gamma(ai)$  conduit à une série de seconde espèce, composée des mêmes termes que la série de Stirling dont nous faisons l'étude. Le résultat auquel nous arrivons permet de se faire une idée nette de la manière dont se comporte la fonction holomorphe  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ , lorsque la variable  $z$  décrit l'axe des  $y$ .

Nous abordons ensuite l'étude des intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{dz}{da} + z = 0,$$

qui se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique.



## L'une des intégrales

$$J(a) = 1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

est holomorphe dans tout le plan. Poisson a donné une série semi-convergente pour calculer  $J(a)$  dans le cas où  $a$  est très grand. Cette série a été l'objet d'un travail de M. Lipschitz (*Journal de Borchardt*, t. 56), qui en a donné le premier une théorie rigoureuse. Nous reprenons l'analyse de M. Lipschitz : une modification légère nous permet de préciser encore le résultat auquel était arrivé le savant géomètre allemand. Nous obtenons en même temps une série semi-convergente analogue, qui permet de calculer une seconde intégrale de l'équation différentielle. Toutes ces séries sont de première espèce.

Nous considérons ensuite les deux intégrales de l'équation différentielle dans le cas où l'argument est de la forme  $ai$ . On est conduit ainsi à deux séries semi-convergentes données par Riemann, qui avait rencontré ces fonctions dans une question de Physique mathématique [*Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringen* (*Œuvres*, p. 54; 1855)].

L'une de ces séries est de première espèce, et sa discussion n'offre pas de grandes difficultés; mais la fonction  $J(ai)$  donne cette série de seconde espèce

$$J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \left[ 1 + \frac{1^2}{1 \cdot 8a} + \dots + \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-3)^2}{1 \cdot 2 \dots (n-1) (8a)^{n-1}} + R_n \right].$$

Dans ce cas, la résolution approchée de l'équation  $R_n = 0$  présente des difficultés que nous n'avons pu surmonter que par une analyse assez délicate.

Enfin nous étudions un cas intéressant, donné par M. Schlömilch en 1861; il s'agit d'une série de seconde espèce qui peut servir au calcul de la fonction

$$P(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^a - 1},$$

et nous obtenons encore dans ce cas la solution approchée de l'équation transcendante  $R_n = 0$ .

## Étude du logarithme intégral.

1. Le logarithme intégral fournit un exemple très simple d'une série de seconde espèce que nous allons discuter avec soin.

Nous partons de la définition

$$\text{li}(a) = \int_0^a \frac{du}{\log u};$$

mais, dans le cas  $a > 1$  que nous avons en vue, cette définition a besoin d'être précisée de la manière suivante :

$$\text{li}(a) = \lim_{\varepsilon=0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^a \frac{du}{\log u} \right).$$

En remplaçant l'argument  $a$  par  $e^a$  et en posant ensuite  $u = e^{a(1-v)}$ , il vient

$$(1) \quad \text{li}(e^a) = e^a \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e^{-av}}{1-v} dv + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-av}}{1-v} dv \right).$$

Nous désignons ici, comme toujours dans la suite, par  $\varepsilon$  une quantité positive et infiniment petite.

En employant maintenant l'identité

$$\frac{1}{1-v} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} + \frac{v^n}{1-v},$$

on a évidemment

$$\int_0^{1-\varepsilon} v^k e^{-av} dv + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} v^k e^{-av} dv = \frac{1 \cdot 2 \dots k}{a^{k+1}},$$

et il vient

$$(2) \quad \text{li}(e^a) = e^a \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1 \cdot 2}{a^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{a^n} + R_n \right],$$

$$R_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^n e^{-av}}{1-v} dv + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{v^n e^{-av}}{1-v} dv.$$

Comme on voit,  $R_n$  est ce que Cauchy a appelé la *valeur principale* de  $\int_0^\infty \frac{v^n e^{-av}}{1-v} dv$ , et nous retrouverons dans la suite constamment cette forme du terme complémentaire des séries de seconde espèce. Cette forme même de  $R_n$  montre bien que  $R_n$  va toujours en diminuant lorsque  $n$  augmente.

Nous devons nous occuper maintenant de la résolution approchée de l'équation  $R_n = 0$ . Pour cela nous posons  $a = n + \eta$ ,

$$(3) \quad R_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv,$$

et nous développons maintenant  $R_n$  en série semi-convergente suivant les puissances descendantes de  $n$ . Comme on suppose que  $\eta$  a une valeur finie, la supposition  $a = n + \eta$  indique évidemment que nous considérons le reste d'un terme  $T_n$  dans le voisinage du plus petit terme.

Nous aurons à appliquer maintenant les méthodes données par Laplace dans la *Théorie analytique des probabilités* pour l'évaluation d'intégrales qui renferment des fonctions élevées à une très haute puissance.

2. Comme il s'agit simplement d'un développement suivant les puissances descendantes de  $n$ , nous pouvons négliger des quantités qui, par rapport à celles que l'on conserve, décroissent plus rapidement qu'aucune puissance négative de  $n$ . C'est pour cette raison que nous pouvons considérer, au lieu de  $R_n$ , l'expression

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv + \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv,$$

$h$  et  $k$  étant des quantités positives finies, d'ailleurs arbitraires ; car nous verrons bientôt que les parties négligées ainsi

$$\int_0^{1-h} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv, \quad \int_{1+k}^\infty \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv$$

ne jouent aucun rôle dans le développement que nous avons en vue.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv.$$

La fonction  $ve^{-v}$  devient maximum pour  $v = 1$ , et nous posons

$$ve^{-v} = e^{-1-x^2}, \quad 1-v = t, \\ (1-t)e^t = e^{-x^2}.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de  $x$ , on peut développer  $t$  suivant les puissances croissantes de  $x$

$$t = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

et le premier terme est évidemment  $\sqrt{2}x$ . On pourrait exprimer  $a_2, a_3, \dots$  d'une manière indépendante à l'aide de la série de Lagrange; mais, comme il s'agit ici simplement de calculer quelques-uns des premiers coefficients, une relation récurrente semble bien préférable.

On trouve  $t \frac{dt}{dx} = 2x(1-t)$ , et, différentiant  $n$  fois, puis posant  $x = 0, t = 0$ , il vient

$$na_1 a_n + (n-1)a_2 a_{n-1} + (n-2)a_3 a_{n-2} + \dots + 1 a_n a_1 = -2a_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

En partant de  $a_1 = \sqrt{2}$ , on en déduit  $a_2, a_3, \dots$  et

$$t = 1-v = \sqrt{2}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{18}\sqrt{2}x^3 + \frac{2}{135}x^4 \\ - dv = (\sqrt{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\sqrt{2}x^2 + \frac{8}{135}x^3) dx \\ - \frac{dv}{1-v} = (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{270}\sqrt{2}x^3 - \dots) \frac{dx}{x}.$$

En observant encore que

$$e^{-\eta v} = e^{-\eta} e^{+\eta t} = e^{-\eta} [1 + \eta\sqrt{2}x + (\eta^2 - \frac{2}{3}\eta)x^2 + (\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{2}{3}\eta^2 + \frac{1}{18}\eta)\sqrt{2}x^3 + \dots]$$

il vient

$$(4) \quad \int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv = e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}}^L e^{-\eta x^2} [1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots] \frac{dx}{x},$$

$A_1, A_2, A_3, \dots$  étant des polynômes en  $\eta$ . La limite supérieure  $L$  de l'intégrale au second membre dépend de la valeur de la quantité positive  $h$ . Nous choisissons maintenant  $h$  de manière que la série  $1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$  reste convergente dans tout l'intervalle d'intégration. De cette manière,  $h$  a une valeur positive finie tout à fait indépendante de  $n$ . En y regardant de plus près, on voit même que  $h$  est une simple constante numérique, indépendante de  $\eta$  aussi; car le rayon de convergence de la série  $e^{\eta t} = 1 + \eta\sqrt{2}x + \dots$  ne dépend pas de  $\eta$ .

3. En traitant l'intégrale  $\int_{1-\varepsilon}^{1+h} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv$  d'une manière analogue, nous posons

$$\begin{aligned} ve^{-v} &= e^{-1-x^2}, & v-1 &= t, \\ (1+t)e^{-t} &= e^{-x^2}, \end{aligned}$$

et nous obtenons d'abord

$$t = a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \dots,$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$  ayant les mêmes valeurs que précédemment. En achevant le calcul comme tout à l'heure, il vient

$$(5) \quad \int_{1+\varepsilon}^{1+h} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv = -e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}}^L e^{-nx^2} [1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \dots] \frac{dx}{x},$$

$A_1, A_2, \dots$  ayant la même signification que dans la formule (4). La quantité  $h$  peut être choisie de manière que dans le second membre la limite supérieure de l'intégration est de nouveau  $L$ .

En réunissant les deux intégrales (4) et (5), on voit se détruire les parties qui deviennent infinies pour  $\varepsilon = 0$ . Après cela, on peut prendre  $\varepsilon = 0$ , et il vient

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv + \int_{1+\varepsilon}^{1+h} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv \\ &= 2e^{-a} \int_0^L e^{-nx^2} [A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^4 + \dots] dx. \end{aligned} \right.$$

On sait que l'intégrale  $\int_L^\infty e^{-nx^2} x^k dx$  converge vers zéro pour  $n = \infty$

plus rapidement qu'aucune puissance négative de  $n$ . La valeur approchée du second membre est donc

$$2e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-n x^2} A_1 dx = A_1 e^{-a} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

ou

$$\left(\eta - \frac{1}{3}\right) e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Il est facile de voir maintenant que les parties que nous avons négligées,

$$\int_0^{1-h} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv \quad \text{et} \quad \int_{1+k}^{\infty} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv,$$

n'ont, en effet, aucune influence sur le développement de  $R_n$  suivant les puissances descendantes de  $n$ . En effet, dans la première intégrale, la plus grande valeur de  $ve^{-v}$  est égale à  $\Theta e^{-1}$ ,  $\Theta$  étant une fraction positive, inférieure à l'unité. On en conclut

$$\int_0^{1-h} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv < \frac{\Theta^n}{h} e^{-n} \int_h^1 e^{-\eta(1-u)} du = \frac{\Theta^n}{h} e^{-a} \int_h^1 e^{+\eta u} du,$$

et la fraction  $\Theta^n$  décroît plus rapidement qu'aucune puissance négative de  $n$ . Quant à la deuxième intégrale, en posant  $v = 1 + u$ , on voit qu'elle est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{e^{-a}}{k} \int_k^{\infty} (1+u)^n e^{-nu} e^{-\eta u} du.$$

Soit  $r$  la quantité positive supérieure à l'unité, qui satisfait à la relation

$$1+k = e^{\frac{k}{r}};$$

alors on a évidemment

$$1+u < e^{\frac{u}{r}} \quad \text{pour} \quad u > k$$

et, par conséquent,

$$\frac{e^{-a}}{k} \int_k^{\infty} (1+u)^n e^{-nu} e^{-\eta u} du < \frac{e^{-a}}{k} \int_k^{\infty} e^{-nu(1-\frac{1}{r})-\eta u} du.$$

Le facteur qui multiplie  $e^{-a}$  décroît encore plus rapidement que toute puissance négative de  $n$ , et, ainsi, l'équation (6) fournit le développement cherché

$$R_n = e^{-a} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \left( A_1 + \frac{1}{2} A_2 \frac{1}{n} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} A_3 \frac{1}{n^2} + \dots \right)$$

ou

$$(7) \left\{ R_n = e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[ \eta - \frac{1}{3} + \left( \frac{1}{6} \eta^2 - \frac{1}{2} \eta^3 + \frac{1}{12} \eta + \frac{1}{540} \right) \frac{1}{n} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{40} \eta^5 - \frac{5}{24} \eta^4 + \frac{25}{72} \eta^3 - \frac{1}{24} \eta^2 + \frac{1}{288} \eta + \frac{25}{6048} \right) \frac{1}{n^2} + \dots \right] \right\}.$$

On en conclut que la valeur de  $\eta$ , qui donne  $R_n = 0$ , est susceptible d'un développement

$$\eta = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots,$$

dont on détermine les coefficients en substituant dans l'expression précédente et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de  $\frac{1}{n}$ . Nous avons posé  $a = n + \eta$ , et la racine de l'équation  $R_n = 0$  est donc égale à

$$(8) \quad a = n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots,$$

$$\beta_0 = + \frac{1}{3},$$

$$\beta_1 = + \frac{8}{405},$$

$$\beta_2 = - \frac{184}{25515};$$

d'où l'on déduit encore

$$(9) \quad n = a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405a} + \frac{16}{25515a^2} - \dots$$

4. Pour juger de l'approximation avec laquelle nous avons résolu ainsi l'équation  $R_n = 0$ , nous mettons en regard l'une de l'autre la valeur approchée donnée par la formule (8) pour  $n = 1, 2$  avec la

valeur exacte, calculée à l'aide du développement

$$\text{li}(e^a) = \mathfrak{C} + \log a + \frac{a}{1.11} + \frac{a^2}{2.21} + \frac{a^3}{3.31} + \dots$$

$n$ .	Valeur exacte.	Valeur approximative.	Erreur.
1.....	1,3472	1,3459	0,0013
2.....	2,34155	2,34141	0,00014

On voit que l'approximation obtenue est beaucoup plus grande que cela n'était nécessaire.

En nommant toujours  $N$  la valeur approchée de la racine de  $R_n = 0$ , nous résumons ainsi le résultat obtenu :

$$\text{li}(e^a) = e^a \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1.2 \dots (n-1)}{a^n} + R_n \right],$$

$$N = a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405a} + \frac{16}{25515a^2}.$$

$$\text{Ordre d'approximation} \dots \dots \dots e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Nous avons ajouté comme ordre d'approximation une valeur approchée du premier terme qui donnerait une valeur trop grande. C'est donc en même temps la limite de l'approximation que peut donner la série semi-convergente, dans le cas où l'on n'a pas recours au calcul approché de  $R_n$ . En multipliant par  $e^a$ , on voit qu'on obtient  $\text{li}(e^a)$  avec une erreur de l'ordre  $\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$ .

Soit, par exemple,

$$\begin{aligned} e^a &= 10000000000, \\ a &= 23,025851\dots, \\ N &= 22,692. \end{aligned}$$

On doit donc prendre vingt-deux termes de la série et ajouter encore le terme suivant multiplié par  $\lambda = 0,692$ , d'après le procédé que nous avons indiqué dans l'Introduction. On trouve ainsi

$$\text{li}(10000000000) = 455055614,2227 + 0,5246\lambda = 455055614,585.$$

En prenant

$$n = 23, \quad \eta = 0,02585\dots,$$



on obtiendra une exactitude un peu plus grande en calculant  $R_{23}$  par la formule (7); nous obtenons ainsi la valeur exacte

$$\text{li}(10000000000) = 455055614,5866.$$

Remarquons que l'emploi de la série semi-convergente présente ici un avantage réel sur l'emploi de la série convergente

$$\mathfrak{C} + \log a + \frac{a}{1.1!} + \frac{a^2}{2.2!} + \frac{a^3}{3.3!} + \dots;$$

car, en calculant vingt-trois termes de cette série, on est seulement arrivé au plus grand terme, et il faudrait pousser beaucoup plus loin le calcul pour obtenir l'approximation donnée par la série semi-convergente.

5. La méthode qui nous a permis de résoudre par approximation l'équation transcendante  $R_n = 0$  nous sera encore très utile dans la suite; mais nous ne pouvons passer sous silence que dans le cas actuel on peut donner une autre forme très simple au terme complémentaire  $R_n$ . Cette nouvelle forme va nous donner aussi une autre méthode pour calculer les coefficients du développement

$$a = n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \dots$$

On a, en supposant  $0 < b < a$ ,

$$\text{li}(e^a) = \text{li}(e^b) + \int_b^a \frac{e^u}{u} du,$$

et une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \text{li}(e^a) &= e^a \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1.2 \dots (n-1)}{a^n} + R_n \right], \\ (10) \quad R_n &= 1.2.3 \dots n. e^{-a} \int_{a_n}^a \frac{e^u}{u^{n+1}} du, \end{aligned}$$

$a_n$  étant une constante qu'il faut encore déterminer. Mais il est évident que  $a_n$  n'est autre chose que la valeur de  $a$  qui annule  $R_n$ , et que nous savons calculer avec une grande approximation par la formule (8)

$$(11) \quad a_n = n + \frac{1}{3} + \frac{8}{405n} - \frac{184}{25515n^2} + \dots$$

La relation

$$R_{n-1} = T_n + R_n$$

revient maintenant à

$$\int_{a_{n-1}}^a \frac{e^u}{u^n} du = \frac{e^a}{a^n} + n \int_{a_n}^a \frac{e^u}{u^{n+1}} du;$$

d'où, pour  $a = a_n$ ,

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{e^u}{u^n} du = \frac{e^{a_n}}{a_n^n}.$$

En posant  $u = n + v$ , il vient, après une légère réduction,

$$(12) \quad \int_q^p \frac{e^v dv}{\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n} = \frac{e^p}{\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n},$$

en écrivant

$$(13) \quad \begin{cases} p = a_n - n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_3}{n^3} + \dots, \\ q = a_{n-1} - n = \beta_0 - 1 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{n^2} + \frac{\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3}{n^3} + \dots \end{cases}$$

En développant maintenant les deux membres de (12) suivant les puissances descendantes de  $n$ , on obtient d'abord

$$\frac{e^v}{\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{2} v^2 \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{8} v^4\right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{4} v^4 - \frac{1}{6} v^5 + \frac{1}{48} v^6\right) \frac{1}{n^3} + \dots,$$

puis

$$p - q + \frac{1}{6} (p^3 - q^3) \frac{1}{n} + \dots = 1 + \frac{1}{2} p^2 \frac{1}{n} + \dots$$

En substituant pour  $p$  et  $q$  leurs valeurs (13), on obtient d'abord, par identification du coefficient de  $\frac{1}{n}$  dans les deux membres,

$$\frac{1}{6} [\beta_0^3 - (\beta_0 - 1)^3] = \frac{1}{2} \beta_0^2 \quad \text{ou} \quad \beta_0 = +\frac{1}{3}.$$

La comparaison des coefficients de  $\frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{1}{n^3}$ , ... permet ensuite de calculer sans ambiguïté par des équations linéaires les coefficients  $\beta_1$ .

$\beta_2, \dots$ . Nous avons retrouvé de cette manière les valeurs déjà données de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

6. La considération de la fonction  $\text{li}(a)$ , pour une valeur de l'argument inférieure à l'unité, conduit à une série de première espèce. On a

$$\text{li}(e^{-a}) = - \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = -e^{-a} \int_0^\infty \frac{e^{-av} dv}{1+v},$$

et l'on obtient, par une intégration par parties ou par le développement de  $\frac{1}{1+v}$ ,

$$(14) \quad \text{li}(e^{-a}) = -e^{-a} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1 \cdot 2}{a^3} - \dots \pm \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{a^n} + R_n \right],$$

$$R_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n e^a \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{u^{n+1}} du = \int_0^\infty \frac{v^n e^{-av} dv}{1+v}.$$

Cette série ne donne lieu à aucune remarque particulière; en posant  $a = n + \eta$ , on peut développer  $R_n$  suivant les puissances descendantes de  $n$ , à l'aide des méthodes de Laplace que nous avons déjà appliquées dans le cas de  $\text{li}(e^a)$ ; on trouve

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n = e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} & \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{4} \eta - \frac{1}{12} \right) \frac{1}{n} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{16} \eta^4 - \frac{7}{24} \eta^3 + \frac{1}{12} \eta^2 + \frac{1}{24} \eta + \frac{13}{576} \right) \frac{1}{n^2} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Ce développement présente la plus grande analogie avec la formule (7); dans les deux cas,  $e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$  est la valeur asymptotique du terme  $T_n$ ; mais ici  $R_n$  ne s'évanouit pas pour une valeur finie de  $\eta$ , et le premier terme  $\frac{1}{2}$  de la série se retrouve généralement dans le cas d'une série de première espèce.

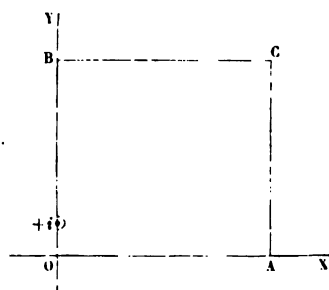
On déduirait sans peine de cette expression de  $R_n$  la solution approchée de  $\frac{dR_n}{dn} = 0$ . Le résultat est

$$a = n + \frac{1}{6n} + \dots \quad \text{ou} \quad n = a - \frac{1}{6a} - \dots$$

Étude des intégrales  $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du$ ,  $\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2} du$ .

7. Considérons l'intégrale  $\int \frac{e^{au}}{1+u^2} du$ . Au lieu d'intégrer le long de l'axe des X, de O vers A (fig. 1), on pourra effectuer l'intégration en suivant le chemin OBCA, en ayant soin d'éviter le point  $i$  en le laissant

Fig. 1.



à gauche, ce qu'on pourra faire en décrivant autour de ce point un demi-cercle dont nous supposons le rayon  $\varepsilon$  infiniment petit. Cette partie de l'intégrale s'évalue à

$$\left( \frac{e^{au}}{u+i} \right)_{u=i} \times \int \frac{du}{u-i} = \frac{e^{-a}}{2i} \times \pi i = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Les intégrales le long de BC et CA tendent évidemment vers zéro lorsque A et B s'éloignent indéfiniment, en sorte qu'on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-a} + \int_0^{1-\varepsilon} \frac{ie^{-av} dv}{1-v^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{ie^{-av} dv}{1-v^2};$$

donc

$$(16) \quad \int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e^{-av} dv}{1-v^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{e^{-av} dv}{1-v^2}.$$

On trouve d'une manière semblable, ou en prenant la dérivée de (16)

par rapport à  $a$ ,

$$(17) \quad -\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2} du = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{ve^{-av} dv}{1-v^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{ve^{-av} dv}{1-v^2}.$$

En employant dans le second membre de ces formules l'identité

$$\frac{1}{1-v^2} = 1 + v^2 + \dots + v^{2n-2} + \frac{v^{2n}}{1-v^2},$$

il vient

$$(18) \quad \int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du = \frac{1}{a} + \frac{1 \cdot 2}{a^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots (2n-2)}{a^{2n-1}} + R_n,$$

$$R_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n} e^{-av}}{1-v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^{2n} e^{-av}}{1-v^2} dv;$$

$$(19) \quad -\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2} du = \frac{1}{a^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{a^4} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}{a^{2n}} + R_n,$$

$$R_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n+1} e^{-av}}{1-v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^{2n+1} e^{-av}}{1-v^2} dv.$$

Nous devons maintenant obtenir d'abord le développement du terme complémentaire suivant les puissances descendantes de  $n$ .

8. Pour embrasser en même temps les deux cas, nous posons

$$S_m = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^m e^{-av}}{1-v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^m e^{-av}}{1-v^2} dv,$$

et  $a = m + \eta$ .

La méthode à suivre ne se distingue en rien de celle que nous avons déjà développée à l'occasion du logarithme intégral, et il suffira donc d'indiquer brièvement les calculs.

Dans la première intégrale

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^m}{1-v^2} e^{-\eta v} dv,$$

nous posons

$$ve^{-v} = e^{-1-x^2}, \quad 1-v = \sqrt{2}x + \dots,$$

et l'on obtient

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-\nu})^m}{1-\nu^2} e^{-\eta\nu} d\nu = \frac{1}{2} e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-mx^2} (1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots) \frac{dx}{x},$$

$A_1, A_2$  étant des polynômes en  $\eta$ .

Dans la seconde intégrale

$$\int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(ve^{-\nu})^m}{1-\nu^2} e^{-\eta\nu} d\nu,$$

nous posons

$$ve^{-\nu} = e^{-1-x^2}, \quad \nu - 1 = \sqrt{2}x + \dots$$

et l'on obtient

$$\int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(ve^{-\nu})^m}{1-\nu^2} e^{-\eta\nu} d\nu = -\frac{1}{2} e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-mx^2} (1 - A_1 x + A_2 x^2 - \dots) \frac{dx}{x}.$$

Le développement de  $S_m$  se trouve maintenant à l'aide de

$$S_m = e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-mx^2} (A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^4 + \dots) dx,$$

$$S_m = \frac{1}{2} e^{-a} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \left( A_1 + \frac{1}{2} A_2 \frac{1}{m} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} A_3 \frac{1}{m^2} + \dots \right)$$

ou bien

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} S_m = e^{-a} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} & \left[ \eta + \frac{1}{6} + \left( \frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{6} \eta - \frac{11}{135} \right) \frac{1}{m} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{40} \eta^5 - \frac{7}{48} \eta^4 + \frac{1}{18} \eta^3 + \frac{1}{24} \eta^2 + \frac{13}{288} \eta + \frac{323}{12096} \right) \frac{1}{m^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

On en conclut  $S_m = 0$  pour  $\eta = \beta_0 + \frac{\beta_1}{m} + \frac{\beta_2}{m^2}$  ou

$$(21) \quad a = m - \frac{1}{6} + \frac{199}{3240m} - \frac{6409}{408240m^2}.$$

9. Dans le cas de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin au}{1+u^2} du,$$

la résolution approchée de  $R_n = 0$  est donc donnée par les développements

$$(22) \quad a = 2n - \frac{1}{6} + \frac{199}{6480n} - \frac{6409}{1632960n^2},$$

$$(23) \quad n = \frac{1}{2}a + \frac{1}{12} - \frac{199}{6480a} + \dots$$

Pour  $n = 1$ , on aurait, d'après (22), la racine de  $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du = \frac{1}{a}$  approximativement égale à 1,86012. Pour calculer la valeur exacte, nous observons qu'on déduit de la formule (16), en remplaçant  $\frac{1}{1-v^2}$  par  $\frac{1}{2} \frac{1}{1-v} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+v}$ ,

$$\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du = \frac{1}{2} e^{-a} \operatorname{li}(e^a) - \frac{1}{2} e^a \operatorname{li}(e^{-a}),$$

en sorte que l'équation à résoudre par approximation est

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} = & \frac{1}{2} e^{-a} \left( \mathfrak{C} + \log a + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2 \cdot 2!} + \frac{a^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right) \\ & - \frac{1}{2} e^a \left( \mathfrak{C} + \log a - \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2 \cdot 2!} - \frac{a^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right). \end{aligned}$$

On trouve  $a = 1,85986$  et l'erreur de notre formule approchée dans ce cas extrême 0,00026.

10. En remplaçant, dans la formule (21),  $m$  par  $2n + 1$ , on trouve que, dans le cas de l'intégrale

$$- \int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2} du,$$

la résolution approchée de  $R_n = 0$  est donnée par les formules

$$(24) \quad a = 2n + \frac{5}{6} + \frac{199}{3240(2n+1)} - \frac{6409}{408240(2n+1)^2},$$

$$(25) \quad n = \frac{1}{2}a - \frac{5}{12} - \frac{199}{6480a} - \dots$$

Ces formules donnent une approximation largement suffisante; en

prenant  $n = 0$  dans (24), on aurait 0,87905 comme valeur approchée de la racine de l'équation transcendante

$$\int_0^{\infty} \frac{u \cos au}{1+u^2} du = -\frac{1}{2} e^{-a} \operatorname{li}(e^a) - \frac{1}{2} e^a \operatorname{li}(e^{-a}) = 0.$$

La valeur exacte est 0,87964.

**Développement en série semi-convergente de  $\log \Gamma(ai)$ .**

11. Avant d'aborder le développement de  $\log \Gamma(ai)$ , nous croyons utile de résumer ici le résultat auquel on est arrivé par l'étude du développement de  $\log \Gamma(a)$ , en renvoyant d'ailleurs pour les démonstrations au travail de M. Bourguet.

Le premier travail rigoureux sur ce sujet, qui est dû à Cauchy, a son point de départ dans cette formule à laquelle Binet était déjà arrivé,

$$(26) \quad \log \Gamma(a) = (a - \frac{1}{2}) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-au}}{u} du.$$

Pour obtenir le terme complémentaire sous forme finie, il est plus avantageux de partir de l'expression

$$(27) \quad \log \Gamma(a) = (a - \frac{1}{2}) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \log \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi au}} \right),$$

et l'on trouve

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \log \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi au}} \right) \\ &= \frac{B_1}{1 \cdot 2 a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4 a^3} + \dots \pm \frac{B_n}{2n-1 \cdot 2n a^{2n-1}} \mp R_n, \\ &R_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^2} \log \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi au}} \right) du. \end{aligned} \right.$$

M. Bourguet trouve que l'indice du plus petit terme est le premier nombre entier supérieur à  $\pi a + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\pi a}$ , et il donne comme racine approchée de  $R_n - R_{n-1} = 0$  l'expression

$$\pi a + \frac{3}{4} - \frac{3}{32\pi a}.$$



On conclut de ce qui précède que le reste du plus petit terme est, à fort peu près, égal à la moitié de ce terme. En posant  $\pi a = n + \eta$ , on peut développer  $R_n$  suivant les puissances descendantes de  $n$ . Comme nous aurons à exposer plus loin un calcul analogue dans le cas du terme complémentaire d'une série de seconde espèce, nous nous bornerons à donner ici le résultat suivant :

$$(29) \quad \left\{ R_n = \frac{e^{-\pi a}}{\sqrt{n\pi}} \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{5}{48} \right) \frac{1}{n} + \left( \frac{1}{4}\eta^4 - \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{17}{48}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta + \frac{61}{2304} \right) \frac{1}{n^2} + \dots \right] \right.$$

On peut en déduire encore sans difficulté la résolution approchée de l'équation  $\frac{dR_n}{dn} = 0$ ; nous trouvons

$$\pi a = n - \frac{1}{4} + \frac{13}{96n} \quad \text{ou} \quad n = \pi a + \frac{1}{4} - \frac{13}{96\pi a}.$$

12. Nous allons nous occuper maintenant du développement de  $\log \Gamma(ai)$ . Observons d'abord que, d'après la définition de la fonction  $\Gamma$  adoptée par Gauss, on a

$$\Gamma(ai) = \text{Lim} \frac{e^{ai \log n}}{ai(1+ai) \left(1 + \frac{ai}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{ai}{n}\right)} \quad (n = \infty).$$

En se rappelant la loi de multiplication de deux nombres complexes, on en conclut qu'en posant

$$(30) \quad \Gamma(ai) = R e^{\Theta i},$$

on aura

$$R = 1 : \sqrt{a^2(1+a^2) \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \left(1 + \frac{a^2}{9}\right) \cdots},$$

c'est-à-dire

$$(31) \quad R = \sqrt{\frac{2\pi}{a(e^{\pi a} - e^{-\pi a})}}$$

et puis

$$(32) \quad \Theta = \text{Lim} \left( a \log n - \frac{\pi}{2} - \text{arc tang } a - \text{arc tang } \frac{a}{2} - \dots - \text{arc tang } \frac{a}{n} \right) \quad (n = \infty).$$

Il faut prendre le signe supérieur ou inférieur selon que  $a$  est positif ou négatif, et les arcs doivent être pris entre les limites  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Dans la suite nous supposerons toujours que  $a$  est positif.

Comme l'on a

$$\log \Gamma(ai) = \log R + \Theta i,$$

on voit que nous aurons à nous occuper seulement du développement de la partie imaginaire  $\Theta$ . On pourrait, dans cette recherche, partir de l'expression (32); mais il est beaucoup plus simple, comme nous le verrons, de se servir de la formule de Binet

$$\log \Gamma(a) = (a - \frac{1}{2}) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-au}}{u} du.$$

13. En établissant cette formule, on a en vue ordinairement seulement les valeurs réelles de  $a$ . On voit cependant facilement que rien n'empêche d'attribuer à  $a$  une valeur imaginaire quelconque, à la condition toutefois que la partie réelle de  $a$  soit positive. Les logarithmes qui entrent dans la formule ont une détermination unique par la condition même que la variable ne doit jamais franchir l'axe des  $y$ .

Cependant, comme nous voulons changer  $a$  en  $ai$ , quantité dont la partie réelle est nulle, il est nécessaire de justifier cette opération.

Évidemment, cette application de la formule de Binet sera justifiée si nous faisons voir :

1° Que l'intégrale

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-aui}}{u} du$$

a un sens;

2° Que cette intégrale est la limite vers laquelle tend

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-bu - aui}}{u} du$$

lorsque la quantité positive  $b$  décroît indéfiniment.

Le premier point est à peu près évident, car la fonction

$$\left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{u^2 + \frac{1}{4} n^2 \pi^2},$$

qui entre dans les intégrales

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{\cos au}{u} du, \quad \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sin au}{u} du,$$

est positive et décroissante; elle devient infiniment petite pour  $u = \infty$ .

Le second point à établir revient à montrer que les intégrales

$$M = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} (1 - e^{-bu}) \cos au \, du,$$

$$N = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} (1 - e^{-bu}) \sin au \, du,$$

où nous avons posé

$$\varphi(u) = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2},$$

convergent vers zéro en même temps que  $b$ .

Nous remarquons que les fonctions  $\varphi(u)$  et  $\frac{\varphi(u)}{u}$  sont toujours finies, et décomposons  $M$  en trois parties

$$M_1 = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u} (1 - e^{-bu}) \cos au \, du,$$

$$M_2 = \int_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}} \frac{\varphi(u)}{u} (1 - e^{-bu}) \cos au \, du,$$

$$M_3 = \int_{\sqrt{\frac{1}{b}}}^\infty \frac{\varphi(u)}{u} (1 - e^{-bu}) \cos au \, du.$$

On a évidemment

$$|M_1| < (1 - e^{-b}) \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u} du,$$

donc

$$\lim M_1 = 0 \quad \text{pour } b = 0.$$

Ensuite

$$|M_2| < \int_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}} \frac{\varphi(u)}{u} (1 - e^{-bu}) du < (1 - e^{-\sqrt{b}}) \int_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}} \frac{\varphi(u)}{u} du,$$

$$|M_2| < (1 - e^{-\sqrt{b}}) \varphi(\xi) \log \sqrt{\frac{1}{b}},$$

$\xi$  désignant une valeur entre 1 et  $\sqrt{\frac{1}{b}}$ . On en conclut

$$\lim M_2 = 0.$$

Quant à  $M_3$ , en appliquant le second théorème de la moyenne,

$$\int_a^b f(x) \psi(x) dx = f(a) \int_a^\eta \psi(x) dx + f(b) \int_\eta^b \psi(x) dx,$$

où la fonction  $f(x)$  doit varier toujours dans le même sens,

$$M_3 = (1 - e^{-\sqrt{b}}) \int_{\sqrt{\frac{1}{b}}}^\eta \frac{\varphi(u)}{u} \cos au du + \int_\eta^\infty \frac{\varphi(u)}{u} \cos au du.$$

Mais l'intégrale  $\int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} \cos au du$  ayant un sens, les deux intégrales qui figurent au second membre convergent vers zéro et  $\lim M_3 = 0$ .

On conclut de tout ce qui précède  $\lim M = 0$ , et la même démonstration s'applique à l'intégrale  $N$ ; donc aussi  $\lim N = 0$ .

D'après cela, il est permis de changer  $a$  en  $ai$  dans la formule de Binet, et nous obtenons ainsi

$$(33) \quad \log R = \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \pi a + \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} \cos au du,$$

$$(34) \quad \Theta = a \log a - a - \frac{\pi}{4} - \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} \sin au du.$$

14. Nous avons à transformer d'abord les intégrales qui figurent dans les seconds membres. Soit

$$V = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} e^{aui} du,$$

en substituant  $\sum_1^\infty \frac{2u}{u^2 + \frac{1}{4}n^2\pi^2}$  au lieu de  $\varphi(u)$ , nous trouvons

$$V = \sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{2e^{aui} du}{u^2 + \frac{1}{4}n^2\pi^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi n aui}}{1 + u^2} du.$$

Nous avons vu déjà (n° 7) qu'il est permis de remplacer, dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\pi n a u i}}{1 + u^2} du,$$

l'intégration le long de l'axe des  $x$ , par une intégration le long de l'axe des  $y$ , en évitant par un petit demi-cercle de rayon  $\varepsilon$  le point  $i$ . On obtient ainsi

$$\frac{\pi}{2} e^{-2an\pi} + i \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e^{-2\pi n a v}}{1 - v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{e^{-2\pi n a v}}{1 - v^2} dv \right)$$

et, par conséquent,

$$V = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a}} + i \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dv}{1 - v^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a v}} + \frac{1}{\pi} \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{dv}{1 - v^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a v}} \right);$$

donc

$$(35) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} \cos au \, du = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a}},$$

$$(36) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} \sin au \, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dv}{1 - v^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a v}} \\ \quad + \frac{1}{\pi} \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{dv}{1 - v^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a v}}. \end{cases}$$

En portant la valeur (35) dans la formule (33), on retombe sur la valeur finie de  $R$  déjà donnée [formule (31)].

15. En employant dans le second membre de la formule (36) l'identité

$$\frac{1}{1 - v^2} = 1 + v^2 + \dots + v^{2n-2} + \frac{v^{2n}}{1 - v^2},$$

on trouve, en ayant égard à la formule

$$(37) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty v^{2k-2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a v}} dv = \frac{B_k}{(2k-1)2ka^{2k-1}}$$

(qu'on obtient en développant en série le logarithme),

$$(38) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u} \sin au \, du = \frac{B_1}{1 \cdot 2 \cdot a} + \frac{B_2}{3 \cdot 4 \cdot a^3} + \dots + \frac{B_n}{(2n-1)2na^{2n-1}} + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n} dv}{1-v^2} \log \frac{1}{1-e^{-2\pi av}} + \frac{1}{\pi} \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{v^{2n} dv}{1-v^2} \log \frac{1}{1-e^{-2\pi av}}.$$

C'est la série semi-convergente que nous avons en vue; le terme complémentaire se présente sous la forme de la valeur principale de

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v^{2n} dv}{1-v^2} \log \frac{1}{1-e^{-2\pi av}}.$$

Il est intéressant de rapprocher de cette formule la forme du terme complémentaire dans le cas de la série de Stirling [formule (28)].

La série étant de seconde espèce, il nous reste à déterminer approximativement la racine de l'équation  $R_n = 0$ . Pour cela, nous développons d'abord  $R_n$  suivant les puissances descendantes de  $n$ .

16. Le premier terme du développement de  $\log \frac{1}{1-e^{-2\pi av}}$  étant  $e^{-2\pi av}$ , nous considérons d'abord au lieu de  $R_n$

$$\pi S_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n} e^{-2\pi av}}{1-v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{v^{2n} e^{-2\pi av}}{1-v^2} dv$$

ou, en posant  $\pi a = n + r_1$ ,

$$\pi S_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^{2n}}{1-v^2} e^{-2r_1 v} dv + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(ve^{-v})^{2n}}{1-v^2} e^{-2r_1 v} dv.$$

Le développement de  $S_n$  n'est plus à trouver, nous pouvons l'écrire aussitôt d'après le résultat que nous avons obtenu dans le n° 8. En conservant seulement le terme principal, il vient

$$S_n = \left(r_1 + \frac{1}{12}\right) e^{-2\pi r_1} \sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

Nous avons à évaluer maintenant l'erreur qu'on commet en prenant  $S_n$  au lieu de  $R_n$ . Pour cela, nous développons en série le logarithme;

le  $k + 1^{\text{ième}}$  terme donne lieu à cette partie de  $R_n$

$$\frac{1}{\pi(k+1)} \text{v. p.} \int_0^\infty \frac{v^{2n} e^{-2\pi\alpha(k+1)v}}{1-v^2} dv.$$

En développant

$$\frac{1}{1-v^2} = 1 + v^2 + \dots + v^{2nk-2} + \frac{v^{2nk}}{1-v^2},$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi(k+1)} & \left[ \frac{\Gamma(2n+1)}{\Lambda^{2n+1}} + \frac{\Gamma(2n+3)}{\Lambda^{2n+3}} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(2nk+2n-1)}{\Lambda^{2nk+2n-1}} + \text{v. p.} \int_0^\infty \frac{v^{2n(k+1)} e^{-\Lambda v}}{1-v^2} dv \right]. \end{aligned}$$

en écrivant, pour abrégé,

$$2\pi\alpha(k+1) = \Lambda.$$

Les termes diminuent d'abord et l'intégrale est de l'ordre du dernier terme. C'est ce qui résulte, en effet, de la discussion que nous avons faite de la série semi-convergente pour  $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du$  (n° 8). La quantité à évaluer est donc positive, mais n'atteindra pas  $nk$  fois le premier terme ou

$$\frac{nk}{\pi(k+1)} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Lambda^{2n+1}}.$$

En remplaçant  $\Gamma(2n+1)$  par sa valeur asymptotique

$$2\sqrt{n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n},$$

on trouve, à cause de  $\pi\alpha = n + \eta$ ,

$$\frac{nk}{\pi(k+1)^{2n+1}} \frac{\sqrt{n\pi}}{\pi\alpha} \left[ \frac{n}{e(n+\eta)} \right]^{2n}$$

ou, si nous remplaçons  $\pi\alpha$  par  $n$ ,  $\left(\frac{n}{n+\eta}\right)^{2n}$  par  $e^{-2\eta}$ ,

$$\frac{nk}{(k+1)^{2n+1}} e^{-2\pi\alpha} \sqrt{\frac{1}{n\pi}} < \frac{n}{(k+1)^{2n+1}} e^{-2\pi\alpha} \sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

La somme des termes négligés ne surpasse donc pas

$$e^{-2\pi a} \sqrt{\frac{1}{n\pi}} \times n \left( \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{4^{2n+1}} + \dots \right)$$

ou

$$\frac{n}{2^{2n+1}} T \cdot e^{-2\pi a} \sqrt{\frac{1}{n\pi}},$$

T étant une fonction qui converge vers 1 pour  $n = \infty$ .

On voit que le facteur qui multiplie  $e^{-2\pi a} \sqrt{\frac{1}{n\pi}}$  décroît plus rapidement qu'aucune puissance négative de  $n$ ; d'où l'on conclut que, pour développer  $R_n$ , suivant les puissances décroissantes de  $n$ , on doit s'en tenir à  $S_n$ , les parties négligées n'ayant aucune influence sur ce développement. A l'aide du n° 8, nous obtenons maintenant

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n = e^{-2\pi a} \sqrt{\frac{1}{n\pi}} & \left[ \left( \eta + \frac{1}{12} \right) + \left( \frac{1}{3} \eta^3 - \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{12} \eta - \frac{11}{540} \right) \frac{1}{n} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{10} \eta^5 - \frac{7}{24} \eta^4 + \frac{1}{18} \eta^3 + \frac{1}{48} \eta^2 + \frac{13}{1152} \eta + \frac{323}{96768} \right) \frac{1}{n^2} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

On en conclut la solution approchée de l'équation  $R_n = 0$  par l'une ou l'autre des formules

$$(40) \quad \pi a = n - \frac{1}{12} + \frac{199}{12960n} - \frac{6409}{3265920n^2} + \dots,$$

$$(41) \quad n = \pi a + \frac{1}{12} - \frac{199}{12960\pi a} + \dots$$

La série étant composée des mêmes termes que ceux de la série de Stirling, l'indice du plus petit terme sera encore, d'après M. Bourguet, le premier nombre entier supérieur à  $\pi a + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\pi a}$ . On voit donc que le changement de signe de  $R_n$  s'opère dans le voisinage du plus petit terme, comme cela arrivait aussi dans les autres séries de seconde espèce que nous avons étudiées.

17. Pour avoir une idée de l'approximation avec laquelle nous avons résolu l'équation  $R_n = 0$ , nous avons pris  $n = 3$  dans la formule (40),



ce qui fournit cette valeur approchée de  $a$ , qui est un peu inférieure à l'unité  $a = 0,9300$ . (En prenant  $n = 1, 2$ , on serait conduit évidemment à des valeurs de  $a$  beaucoup trop petites pour songer à appliquer la série semi-convergente.) Pour résoudre l'équation  $R_n = 0$  rigoureusement, il nous faut un moyen de calculer  $\Theta$  avec exactitude. Pour cela, nous remarquons que la série bien connue

$$\log \Gamma(x) = -\log x - \mathfrak{C}x + \frac{1}{2}S_2x^2 - \frac{1}{6}S_4x^4 + \frac{1}{30}S_6x^6 - \dots$$

donne, en remplaçant  $x$  par  $ai$ ,

$$\Theta = -\frac{\pi}{2} - \mathfrak{C}a + \frac{1}{2}S_2a^2 - \frac{1}{6}S_4a^4 + \frac{1}{30}S_6a^6 - \dots$$

Pour augmenter la convergence, nous écrirons

$$\begin{aligned} \Theta = & -\frac{\pi}{2} - \text{arc tang } a + (1 - \mathfrak{C})a \\ & + \frac{1}{2}(S_2 - 1)a^2 - \frac{1}{6}(S_4 - 1)a^4 + \frac{1}{30}(S_6 - 1)a^6 - \dots \end{aligned}$$

L'équation à résoudre étant

$$\Theta = a \log a - a - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12a} - \frac{1}{360a^3} - \frac{1}{1260a^5},$$

nous trouvons que la racine est comprise entre 0,9276 et 0,9277. L'approximation est très suffisante; même pour  $a = 1$ , la formule (41) donne la racine de  $R_n = 0$  par rapport à  $n$ , avec une erreur inférieure à 0,01.

Nous résumons ici le résultat que nous avons obtenu :

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(ai) = Re^{\Theta i}, \\ R = \sqrt{\frac{2\pi}{a(e^{2\pi i} - e^{-2\pi i})}}, \\ \Theta = a \log a - a - \frac{\pi}{4} - \frac{B_1}{1 \cdot 2a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4a^2} - \dots - \frac{B_n}{(2n-1)2na^{2n-1}} - R_n, \\ N = \pi a + \frac{1}{12} - \frac{199}{12960\pi a}; \\ \text{Ordre d'approximation} \dots \dots \frac{e^{-2\pi a}}{\pi\sqrt{a}}. \end{array} \right.$$

Pour  $a = 1$ ,  $N = 3,22$ ; en appliquant le procédé indiqué dans l'in-

troduction, il vient

$$\Theta = -1,872303 - 0,000595\lambda.$$

On obtient deux limites en prenant  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ ; la valeur  $\lambda = 0,22$  donne une valeur plus approchée

$$-1,872434.$$

La valeur exacte est

$$\Theta = -1,87243664726243\dots,$$

$$\Theta = -107^{\circ}16'57'',782.$$

18. Supposons que la variable  $z$  décrive la partie positive de l'axe imaginaire, alors nous pouvons indiquer comment se comporte la fonction holomorphe  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ . En effet, ayant  $\frac{1}{\Gamma(ai)} = \frac{1}{R} e^{-\Theta i}$ ,  $\frac{1}{R}$  et  $-\Theta$  sont les coordonnées polaires du point qui représente  $\frac{1}{\Gamma(ai)}$ , et nous voyons que ce point décrit une spirale, le rayon vecteur se mouvant dans le sens négatif et croissant rapidement. L'angle de la courbe et du rayon vecteur, dont la tangente est à peu près égale à  $\frac{2}{\pi} \log a$ , tend vers  $90^{\circ}$ . Nous avons dressé la petite Table suivante pour faire connaître la forme de la courbe dans le voisinage de l'origine :

$a$ .	$-\Theta$ .	$\frac{1}{R}$ .	$a$ .	$-\Theta$ .	$\frac{1}{R}$ .
0.....	90°. 0,0	0	2,0.....	82.34,3	13,056
0,2.....	96.26,1	0,207	2,2.....	73.51,1	18,747
0,4.....	101.52,1	0,453	2,4.....	64. 7,6	26,808
0,6.....	105.37,6	0,784	2,6.....	53.28,4	38,202
0,8.....	107.25,9	1,250	2,8.....	41.57,7	54,277
1,0.....	107.17,0	1,917	3,0.....	29.38,8	76,919
1,2.....	105.19,0	2,877	3,2.....	16.35,0	108,765
1,4.....	101.42,3	4,256	3,4.....	2.48,9	153,493
1,6.....	96.37,0	6,230	3,6.....	-11.37,0	216,241
1,8.....	90.11,7	9,047	3,8.....	-26.40,7	304,170
2,0.....	82.34,3	13,056	4,0.....	-42.20,2	427,271

L'angle  $-\Theta$  commence à croître de  $90^{\circ}$  jusqu'à un certain maximum, dont voici la détermination :

$$a = 0,88382, \quad -\Theta = 107^{\circ}36'1'', \quad \frac{1}{R} = 1,5003.$$

Après avoir dépassé ce maximum, l'angle  $-\theta$  décroît constamment.

19. D'après ce qui précède, il est permis de changer  $a$  en  $ai$  dans la série de Stirling; en arrêtant la série à son plus petit terme, l'erreur est du même ordre que ce terme. L'examen des conditions sous lesquelles on peut se servir de cette série pour des valeurs imaginaires quelconques de la variable se présente naturellement, mais nous ne l'aborderons pas. Nous rappelons seulement que, dans le Tome 56 du *Journal de Crelle*, M. Lipschitz est arrivé au résultat suivant :

$$\log \Gamma(z) = \frac{1}{2} \log 2\pi + (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{B_1}{1 \cdot 2 \cdot z} - \dots \pm \frac{B_n}{(2n-1)2nz^{2n-1}} + R_n;$$

$$z = a + bi, \quad R_n = \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{\varepsilon + \varepsilon' i}{a^{2n+1}},$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  restant compris dans les limites  $\pm 1$ . On suppose de plus que la partie réelle de  $z$ ,  $a$  est positive.

Comme on le voit, cette limitation de  $R_n$  devient complètement illusoire lorsqu'on fait tendre  $a$  vers zéro; mais M. Lipschitz n'avait pas à s'occuper du cas  $a = 0$ , et la limitation du reste auquel il s'est arrêté suffisait pleinement pour le but qu'il s'était proposé, qui était tout autre que celui de vouloir déterminer avec exactitude quels services cette série pourrait rendre pour l'évaluation de  $\log \Gamma(z)$ .

#### Étude des intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{dz}{da} + z = 0.$$

20. Nous rassemblons ici quelques-unes des formes principales sous lesquelles on est arrivé à présenter les intégrales de cette équation différentielle. On trouve d'abord cette intégrale, qui est holomorphe dans tout le plan,

$$(43) \quad J(a) = 1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

ou

$$(44) \quad J(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos au \, du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Une autre intégrale est de la forme

$$J(a) \log(a) + R(a),$$

$R(a)$  étant holomorphe dans tout le plan, et, intégrant l'équation différentielle par des séries, on trouve cette seconde intégrale

$$\left(1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots\right) \log a + \frac{a^2}{2^2} - \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

En désignant par  $\psi(x)$  la dérivée de  $\log \Gamma(x)$ , l'intégrale générale est donc

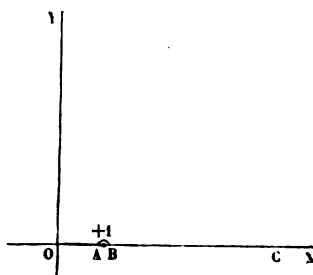
$$(45) \quad \begin{cases} A \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} \\ + B \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} [\log a - \psi(n+1) + \psi(1)]; \end{cases}$$

mais la seconde intégrale dont nous nous occuperons est celle-ci :

$$(46) \quad K(a) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\cos au}{\sqrt{u^2 - 1}} du.$$

Cette définition n'a un sens que lorsque  $a$  est réel. Pour opérer la continuation de cette fonction pour des valeurs imaginaires de l'argument, nous considérons, en supposant  $a$  réel et positif, l'intégrale  $\int \frac{e^{au}}{\sqrt{u^2 - 1}} du$ . On peut remplacer le chemin d'intégration OABC (fig. 2)

Fig. 2.



par une intégration suivant la partie positive de l'axe des  $y$ , transformation analogue à celle dont nous nous sommes servi dans le n° 7.

En supposant  $\sqrt{u^2 - 1} = +i$  à l'origine, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-av}}{\sqrt{1+v^2}} dv = \frac{1}{i} \int_0^1 \frac{e^{aui} du}{\sqrt{1-u^2}} + \int_1^\infty \frac{e^{aui} du}{\sqrt{u^2-1}},$$

et la comparaison des parties réelles et imaginaires conduit à ces formules

$$(47) \quad K(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}} du - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin au}{\sqrt{1-u^2}} du,$$

$$(48) \quad J(a) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin au}{\sqrt{u^2-1}} du.$$

La relation (47) permet de continuer la fonction  $K(a)$  dans toute la moitié du plan où la partie réelle de la variable est positive. On vérifie aussi directement que les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}} du, \quad \int_0^1 \frac{\sin au}{\sqrt{1-u^2}} du$$

satisfont l'une et l'autre à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{dz}{da} + z = \frac{1}{a}$$

et que, par conséquent,  $K(a)$  est bien une intégrale de l'équation différentielle proposée.

En supposant toujours  $a$  réel et positif, nous tirons de l'équation (47)

$$(49) \quad K(ai) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-aui} du}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin aui}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Pour simplifier, nous remarquons que l'on peut, dans l'intégrale  $\int \frac{e^{aui} du}{\sqrt{1+u^2}}$ , remplacer le chemin d'intégration OA par OBCD (*fig. 3*).

On obtient ainsi

$$\int_0^\infty \frac{e^{aui} du}{\sqrt{1+u^2}} = i \int_0^1 \frac{e^{-au} du}{\sqrt{1-u^2}} + \int_1^\infty \frac{e^{-au} du}{\sqrt{u^2-1}}.$$

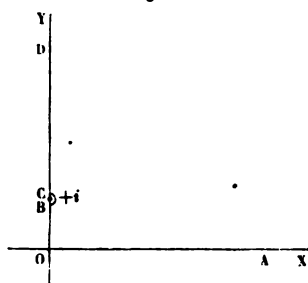
En changeant  $i$  en  $-i$  et substituant dans (49), il vient

$$K(ai) = -\frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{au} + e^{-au}}{\sqrt{1-u^2}} du + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-au} du}{\sqrt{u^2-1}},$$

c'est-à-dire

$$(50) \quad K(ai) = -iJ(ai) + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-au} du}{\sqrt{u^2-1}}.$$

Fig. 3.



21. Nous nous arrêtons un instant à la détermination des valeurs qu'il faut attribuer dans l'expression de l'intégrale générale (45) à A et à B pour retrouver la fonction  $K(a)$ . Cette détermination de A et B a été donnée par M. H. Weber dans le Tome 75 du *Journal de Borchardt*. On peut l'effectuer aussi très simplement ainsi qu'il suit.

D'après la définition, on a

$$\frac{\pi}{2} K(a) = \int_a^\infty \frac{\cos v dv}{\sqrt{v^2-a^2}} = \int_a^1 \frac{\cos v dv}{\sqrt{v^2-a^2}} + \int_1^\infty \frac{\cos v dv}{\sqrt{v^2-a^2}}$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^1 \frac{\cos v dv}{\sqrt{v^2-a^2}} &= \int_a^1 \frac{dv}{\sqrt{v^2-a^2}} - \int_a^1 \frac{1-\cos v}{\sqrt{v^2-a^2}} dv \\ &= \log \left( \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \right) - \int_a^1 \frac{1-\cos v}{\sqrt{v^2-a^2}} dv, \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} K(a) + \log a = \log(1+\sqrt{1-a^2}) - \int_a^1 \frac{1-\cos v}{\sqrt{v^2-a^2}} dv + \int_1^\infty \frac{\cos v dv}{\sqrt{v^2-a^2}};$$

donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{2} K(a) + \log a \right] = \log 2 - \int_0^1 \frac{1-\cos v}{v} dv + \int_1^\infty \frac{\cos v}{v} dv;$$

Le second membre est égal à  $\log 2 - \epsilon$ ,  $\epsilon$  désignant toujours la constante eulérienne. En effet,  $\int_0^\infty v^{p-1} \cos v \, dv = \Gamma(p) \cos \frac{p\pi}{2}$  ou

$$\int_0^1 v^{p-1} (1 - \cos v) \, dv - \int_1^\infty v^{p-1} \cos v \, dv = \frac{1 - \Gamma(p+1) \cos \frac{p\pi}{2}}{p}.$$

On en conclut pour  $p = 0$ , à cause de  $\Gamma(p+1) = 1 - \epsilon p + \dots$ ,

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos v}{v} \, dv - \int_1^\infty \frac{\cos v}{v} \, dv = \epsilon.$$

La relation

$$(51) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{2} K(a) + \log a \right] = \log 2 - \epsilon$$

donne sur-le-champ la détermination des constantes A et B, et il vient, en se rappelant que  $\psi(1) = -\epsilon$ ,

$$(52) \quad \frac{\pi}{2} K(a) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} \left[ \log \frac{2}{a} + \psi(n+1) \right].$$

En changeant  $a$  en  $ai$ , il faut remplacer  $\log a$  par  $\log a + \frac{\pi}{2}i$ , et la comparaison avec (50) conduit au développement

$$(53) \quad \int_1^\infty \frac{e^{-au} \, du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \sum_0^\infty \frac{a^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} \left[ \log \frac{2}{a} + \psi(n+1) \right],$$

donné par Riemann, de l'une des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{dz}{da} - z = 0,$$

dont  $J(ai)$  est une autre intégrale.

22. On peut changer en intégrales définies les séries (52), (53). En prenant la dérivée par rapport à  $b$  de la relation connue

$$2 \int_0^1 u^{2a-1} (1-u^2)^{b-1} \, du = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

il vient, en posant ensuite  $a = n + \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,

$$2 \int_0^1 u^{2n} \frac{\log(1-u^2)}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \pi [\psi(\frac{1}{2}) - \psi(n+1)]$$

et

$$2 \int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \pi;$$

donc

$$\begin{aligned} & \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \pi \left[ \log \frac{2}{a} + \psi(n+1) \right] \\ &= 2 \int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} \left[ \psi(\frac{1}{2}) + \log \frac{2}{a} - \log(1-u^2) \right] du. \end{aligned}$$

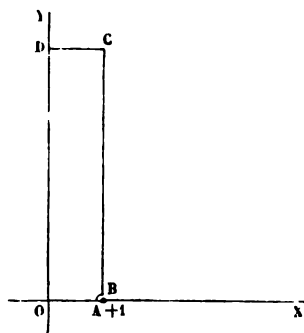
En substituant cette valeur de  $\log \frac{2}{a} + \psi(n+1)$  dans les formules (52), (53), il vient, après une légère réduction, si l'on observe que  $\psi(\frac{1}{2}) = -\epsilon - \log 4$ ,

$$(54) \quad \frac{\pi^2}{2} K(a) = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos au}{\sqrt{1-u^2}} [-\epsilon - \log 2a(1-u^2)] du,$$

$$(55) \quad \pi \int_1^\infty \frac{e^{-au}}{\sqrt{u^2-1}} du = \int_{-1}^{+1} \frac{e^{au}}{\sqrt{1-u^2}} [-\epsilon - \log 2a(1-u^2)] du.$$

23. Nous abordons maintenant le développement en série semi-con-

Fig. 4.



vergente de  $J(a)$  et de  $K(a)$ . Considérons l'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^{aui} du}{\sqrt{1-u^2}}$  dont la partie réelle est  $\frac{\pi}{2} J(a)$ . En intégrant sur le contour fermé OABCDO



(fig. 4), l'intégrale est nulle. Il est évident aussi que l'intégrale étendue sur CD converge vers zéro lorsque C et D s'éloignent indéfiniment. On voit donc que l'intégrale de O vers A est égale à la différence des intégrales sur OD et BC, en supposant que C et D s'éloignent indéfiniment. L'intégrale sur OD s'obtient en posant  $u = iv$ , celle sur BC en posant  $u = 1 + iv$ . En ayant soin de donner le signe convenable au radical  $\sqrt{1 - u^2}$  dans le point B, il vient

$$\int_0^1 \frac{e^{au} du}{\sqrt{1 - u^2}} = i \int_0^\infty \frac{e^{-av} dv}{\sqrt{1 + v^2}} + e^{(a - \frac{\pi}{4})i} \int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}} e^{-av} dv}{\sqrt{2 + iv}}$$

ou bien, en faisant attention à la formule (47),

$$(56) \quad e^{(a - \frac{\pi}{4})i} \int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}} e^{-av} dv}{\sqrt{2 + iv}} = \frac{\pi}{2} [J(a) - iK(a)].$$

On en conclut les expressions suivantes de  $J(a)$ ,  $K(a)$  où nous avons posé encore  $av = u$

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} J(a) &= \frac{\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi \sqrt{2a}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du \\ &\quad - i \frac{\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi \sqrt{2a}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du, \end{aligned} \right.$$

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} K(a) &= - \frac{\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi \sqrt{2a}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du \\ &\quad - i \frac{\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi \sqrt{2a}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du. \end{aligned} \right.$$

M. Lipschitz développe maintenant les fonctions réelles

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}}, \quad -i \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right)$$

à l'aide de la formule

$$\tilde{f}(u) = \tilde{f}(0) + u \tilde{f}'(0) + \dots + \frac{u^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \tilde{f}^{(n-1)}(0) + \frac{u^n}{1 \cdot 2 \dots n} \tilde{f}^{(n)}(\lambda u),$$

$\lambda$  désignant une fraction positive. Il obtient ainsi

$$(59) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du \\ &= 2\sqrt{\pi} \left[ 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot (8a)^2} + \dots \pm \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (4n-5)^2}{1 \cdot 2 \dots (2n-2) (8a)^{2n-2}} \mp R_n \right], \end{aligned} \right.$$

$$(60) \left\{ \begin{aligned} & -i \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du \\ &= 2\sqrt{\pi} \left[ \frac{1^2}{1 \cdot 8a} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (8a)^3} + \dots \pm \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (4n-3)^2}{1 \cdot 2 \dots (2n-1) (8a)^{2n-1}} \mp R'_n \right] \end{aligned} \right.$$

On voit qu'on obtient ainsi en même temps le développement de  $J(a)$  et de  $K(a)$ . Quant au terme complémentaire  $R_n$ , la méthode adoptée par M. Lipschitz lui permet d'établir que la valeur absolue de  $R_n$  est inférieure à  $T_{n+1}$ . De même,  $R'_n$  est inférieur en valeur absolue à  $T'_{n+1}$ . On peut resserrer un peu ces limitations, et faire voir que  $R_n$  et  $R'_n$  sont positifs, ce qui entraîne déjà que  $R_n$  est inférieur à  $T_n$  et à  $T_{n+1}$ ,  $R'_n$  à  $T'_n$  et à  $T'_{n+1}$ . En effet, on a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{1 - \frac{iu}{2a} \sin^2 v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}}, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{1 + \frac{iu}{2a} \sin^2 v} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}};$$

d'où l'on conclut

$$(61) \quad \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du}{1 + \frac{u^2}{4a^2} \sin^2 v}$$

$$(62) \quad -i \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{iu}{2a}}} \right) du = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{\frac{1}{2}} \sin^2 v}{1 + \frac{u^2}{4a^2} \sin^2 v}$$

En employant l'identité

$$\frac{1}{1 + \frac{u^2}{4a^2} \sin^4 v} = 1 - \frac{u^2}{4a^2} \sin^4 v + \dots \pm \left(\frac{u}{2a}\right)^{2n-2} \sin^{4n-4} v \mp \frac{\left(\frac{u}{2a}\right)^{2n} \sin^{4n} v}{1 + \frac{u^2}{4a^2} \sin^4 v},$$

on retrouve les séries semi-convergentes déjà données, mais avec ces expressions des termes complémentaires

$$(63) \quad R_n = \frac{1}{2^{2n-1} a^{2n} \sqrt{\pi^3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{2n-\frac{1}{2}} \sin^{4n} v}{1 + \frac{u^2}{4a^2} \sin^4 v} du,$$

$$(64) \quad R'_n = \frac{1}{2^{2n} a^{2n+1} \sqrt{\pi^3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{2n+\frac{1}{2}} \sin^{4n+2} v}{1 + \frac{u^2}{4a^2} \sin^4 v} du.$$

24. Lorsque  $a$  est grand, l'indice du plus petit terme dans chacune des séries semi-convergentes (59), (60) est à peu près égal à  $a$ . En posant  $a = n + \eta$ , on peut développer  $R_n$  et  $R'_n$  suivant les puissances descendantes de  $n$ . Pour faciliter un peu les calculs nous remplaçons  $u$  par  $2au$ ,  $\cot^2 v$  par  $v$ , en sorte qu'il vient

$$R_n = \sqrt{\frac{2a}{\pi^3}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^{2n} \frac{e^{-2\eta u}}{1+v + \frac{u^2}{1+v}} \frac{du dv}{\sqrt{uv}},$$

$$R'_n = \sqrt{\frac{2a}{\pi^3}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^{2n} \frac{e^{-2\eta u}}{(1+v)^2 + u^2} \sqrt{\frac{u}{v}} du dv.$$

Lorsque  $n$  est grand, ce sont seulement les parties dans le voisinage de  $u = 1$ ,  $v = 0$  qui ont une influence appréciable, et quand il s'agit d'un développement suivant les puissances descendantes de  $n$ , on peut borner l'intégration au voisinage de ce point  $u = 1$ ,  $v = 0$ . Considérons  $R_n$  et partageons l'intégrale en deux parties. Dans la première,  $u$  variera de 0 à 1; dans la seconde, de 1 à  $\infty$ .

Dans la première partie, on posera

$$ue^{-u} = e^{-1-x^2}, \quad 1-u = \sqrt{2}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{15}\sqrt{2}x^3 - \dots, \quad 1+v = e^{y^2},$$

et l'on trouve un résultat de la forme

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi^3}} \iint e^{-2a} e^{-2n(x^2+y^2)} (\Sigma a_{r,s} x^r y^s) dx dy.$$

les coefficients  $a_{r,s}$  étant des polynômes en  $\eta$ , et  $a_{r,s} = 0$  lorsque  $s$  est impair.

Dans la seconde partie, on posera

$$ue^{-u} = e^{-1-x^2}, \quad u-1 = x\sqrt{2} + \dots, \\ 1+v = e^{y^2},$$

et l'on trouve cette seconde partie égale à

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi^3}} \iint e^{-2a} e^{-2n(x^2+y^2)} [\Sigma (-1)^r a_{r,s} x^r y^s] dx dy.$$

La réunion des deux parties conduit à l'expression

$$2e^{-2a} \sqrt{\frac{2a}{\pi^3}} \iint e^{-2n(x^2+y^2)} [\Sigma a_{2r,2s} x^{2r} y^{2s}] dx dy,$$

et le développement de  $R_n$ , suivant les puissances descendantes de  $n$ , est

$$R_n = e^{-2a} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left( \frac{a_{0,0}}{2n} + \frac{a_{0,2} + a_{2,0}}{8n^2} + \dots \right).$$

En nous bornant aux deux premiers termes, nous avons obtenu

$$(65) \quad R_n = e^{-2a} \sqrt{\frac{a}{\pi n^2}} \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{4} \eta + \frac{1}{12} \right) \frac{1}{n} \dots \right],$$

et, par des calculs tout à fait semblables,

$$(66) \quad R'_n = e^{-2a} \sqrt{\frac{a}{\pi n^2}} \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{4} \eta - \frac{1}{6} \right) \frac{1}{n} \dots \right].$$

Dans les deux cas, le reste du plus petit terme est à peu près égal à la moitié de ce terme.

25. Considérons maintenant les fonctions  $J(ai)$ ,  $K(ai)$ . La première conduit à une série semi-convergente de seconde espèce, dont nous

nous occuperons plus tard. Quant à  $K(ai)$ , à cause de

$$K(ai) = -iJ(ai) + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-au} du}{\sqrt{u^2 - 1}},$$

on voit que nous avons à nous occuper, en ce moment, seulement de la partie réelle

$$\Re = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-au} du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

En posant  $u = 1 + \frac{v}{a}$ , on trouve

$$\Re = \frac{1}{\pi} e^{-a} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^\infty \frac{e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv}{\sqrt{1 + \frac{v}{2a}}}$$

ou bien

$$(67) \quad \Re = \frac{2}{\pi^2} e^{-a} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^\infty \frac{e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv}{1 + \frac{v}{2a} \sin^2 u}.$$

On en déduit, par le développement,

$$\frac{1}{1 + \frac{v}{2a} \sin^2 u} = 1 - \frac{v}{2a} \sin^2 u + \dots \pm \left(\frac{v}{2a}\right)^{n-1} \sin^{2n-2} u \mp \frac{\left(\frac{v}{2a}\right)^n \sin^{2n} u}{1 + \frac{v}{2a} \sin^2 u},$$

$$(68) \quad \Re = e^{-a} \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \left[ 1 - \frac{1^2}{1 \cdot 8a} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot (8a)^2} - \dots \pm \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-3)^2}{1 \cdot 2 \dots (n-1) (8a)^{n-1}} \mp R_n \right],$$

$$R_n = \frac{1}{2^{n-1} a^n \sqrt{\pi^3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^\infty \frac{e^{-v} v^{n-\frac{1}{2}} \sin^{2n} u dv}{1 + \frac{v}{2a} \sin^2 u}.$$

Ce développement semi-convergent a été donné par Riemann. L'indice du plus petit terme est à peu près égal à  $2a$ , en posant  $2a = n + \eta$ , nous trouvons

$$(69) \quad R_n = e^{-2a} \sqrt{\frac{4a}{\pi n^2}} \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} \eta^2 + \frac{1}{24} \right) \frac{1}{n} + \dots \right].$$

26. Nous devons nous occuper maintenant de la fonction

$$J(ai) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-av} dv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

En posant  $v = -1 + 2u$ , il vient

$$(70) \quad J(ai) = \frac{e^a}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-2au} du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Le développement de  $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$ , suivant les puissances ascendantes de  $u$ , conduit sans aucune difficulté à cette série semi-convergente

$$J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \left[ 1 + \frac{1^2}{1.8a} + \frac{1^2.3^2}{1.2.(8a)^2} + \dots \right],$$

donnée par Riemann, mais on n'obtient point ainsi une expression simple du terme complémentaire.

Pour nous débarrasser du radical  $\sqrt{1-u}$ , nous observons que

$$\int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}} dv}{v+1-u} = \frac{\pi}{\sqrt{1-u}},$$

en sorte qu'il vient

$$(71) \quad J(ai) = \frac{e^a}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}} dv \int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}} e^{-2au} du}{1-u+v}.$$

L'intégration dans le second membre s'étend sur la bande infinie VOAB (*fig. 5*) de largeur  $OA = 1$ , et l'intégration, par rapport à  $u$ , ne s'étend que jusqu'à  $u = 1$ . Afin de franchir cette limite et de pouvoir étendre l'intégration sur une bande VOCD d'une largeur arbitraire  $OC = L$ , nous observons que

$$\int_0^{k^2-\varepsilon} \frac{v^{-\frac{1}{2}} dv}{v-k^2} + \int_{k^2+\varepsilon}^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}} dv}{v-k^2} = \frac{2}{k} \log \left( \frac{k + \sqrt{k^2 + \varepsilon}}{k + \sqrt{k^2 - \varepsilon}} \right),$$

donc

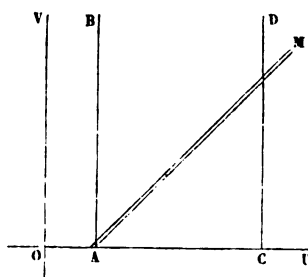
$$(72) \quad \text{v. p.} \int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}} dv}{v-k^2} = 0.$$

Si donc nous excluons du champ d'intégration la bande infiniment étroite limitée par les deux droites parallèles

$$1 - u + v = \pm \varepsilon,$$

nous pourrions étendre dans (71) l'intégration sur la bande de largeur  $L$ , VOCD; car, en intégrant d'abord par rapport à  $v$ , l'équa-

Fig. 5.



tion (72) montre que les parties qu'on ajoute ainsi se détruisent. En faisant croître  $L$  indéfiniment, nous écrivons sommairement

$$(73) \quad J(ai) = \frac{e^a}{\pi^2} \text{v. p.} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-2au}}{1 - u + v} \frac{du dv}{\sqrt{uv}},$$

le sens précis qu'il faut attacher à cette formule résultant des explications qui précèdent.

27. En employant maintenant l'identité

$$\frac{1}{1 - u + v} = \frac{1}{1 + v} + \frac{u}{(1 + v)^2} + \dots + \frac{u^{n-1}}{(1 + v)^n} + \frac{u^n}{(1 + v)^n (1 - u + v)},$$

on a évidemment

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^k e^{-2au}}{(1 + v)^{k+1}} \frac{du dv}{\sqrt{uv}} &= \int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}} dv}{(1 + v)^{k+1}} \int_0^\infty u^{k-\frac{1}{2}} e^{-2au} du \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + 1)} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{(2a)^{k+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

et il vient

$$(74) \quad J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2a\pi}} \left[ 1 + \frac{1^2}{1.8a} + \frac{1^2.3^2}{1.2.(8a)^2} + \dots + \frac{1^2.3^2 \dots (2n-3)^2}{1.2 \dots (n-1).(8a)^{n-1}} + R_n \right],$$

$$(75) \quad R_n = \sqrt{\frac{2a}{\pi^3}} \text{ v. p. } \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^n e^{-2au}}{(1+v)^n (1-u+v)} \frac{du dv}{\sqrt{uv}}.$$

C'est cette expression du terme complémentaire, sous forme d'intégrale double singulière, qui va nous permettre de résoudre avec approximation l'équation transcendante  $R_n = 0$ .

28. Nous posons  $2a = n + \eta$  et nous développons  $R_n$  suivant les puissances descendantes de  $n$ . L'intégrale

$$\text{v. p. } \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \frac{ue^{-u}}{1+v} \right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du dv}{\sqrt{uv}}$$

se décompose naturellement en deux parties P et Q, que nous allons considérer séparément.

Dans la première partie P, qui est positive, on a

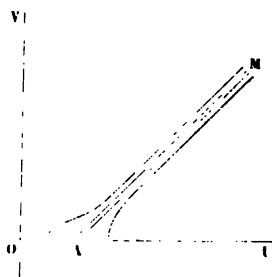
$$1 - u + v \geq \varepsilon;$$

dans la seconde partie négative Q,

$$1 - u + v \leq -\varepsilon.$$

La fonction  $\frac{ue^{-u}}{1+v}$  devient maximum pour  $u = 1$ ,  $v = 0$ , et l'on ob-

Fig. 6.

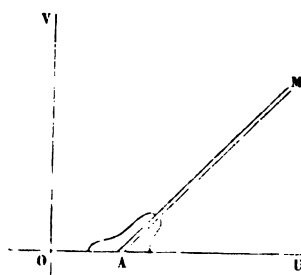


tient la partie principale de P en intégrant seulement sur cette partie du champ d'intégration qui forme le voisinage du point A. Toutefois,



à cause de la ligne de discontinuité AM, il faut y ajouter une bande le long de cette ligne AM. Il en est de même évidemment pour la partie Q, et il faudrait donc évaluer P et Q en étendant l'intégration sur l'aire indiquée dans la *fig. 6*; mais, au lieu de cela, nous intégrons d'abord seulement sur une aire dont la forme est indiquée dans la *fig. 7*.

Fig. 7.



Nous négligeons donc de continuer indéfiniment la bande le long de la ligne de discontinuité. Nous verrons plus tard que ce procédé est légitime.

29. L'évaluation de l'intégrale P, étendue sur l'aire indiquée, s'obtient par un changement de variables.

Nous définissons d'abord une fonction  $\varphi(x)$  pour des valeurs positives de  $x$  par les relations

$$te^{-t} = e^{-1-x^2}, \quad 1-t = \varphi(x),$$

en supposant que  $t$  varie de 0 à 1. La fonction  $\varphi(x)$  est positive et constamment croissante,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 1$ . Pour des valeurs suffisamment petites de  $x$ , on peut développer  $\varphi(x)$  suivant les puissances ascendantes des  $x$ ; nous avons déjà trouvé (n° 2)

$$\varphi(x) = \sqrt{2}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{18}\sqrt{2}x^3 + \frac{2}{135}x^4 + \dots$$

Nous introduisons maintenant, dans l'intégrale P, les nouvelles variables  $x, y$ , en posant

$$\frac{ue^{-u}}{1+v} = e^{-1-x^2-y^2},$$

$$1-u+v = \varphi(x).$$

On voit d'abord que le long de AM (fig. 7)  $x$  est constant et infiniment petit, tandis que  $y$  varie de 0 à  $\infty$ . Ensuite, d'après la définition de  $\varphi(x)$ , on voit que, pour  $v = 0$ , on a aussi  $y = 0$ , et, le long de OA,  $x$  varie de  $\infty$  à 0. Nous avons donc seulement à nous occuper de cette partie de l'intégrale qui correspond à de petites valeurs de  $x$  et de  $y$ ; mais, pour des valeurs suffisamment petites de  $x$  et de  $y$ , on peut développer  $u$  et  $v$  suivant les puissances croissantes de  $x$  et de  $y$ ; ces développements ne contiennent évidemment que les puissances paires de  $y$ . En éliminant  $v$ , on a

$$ue^{-u} = [u + \varphi(x)]e^{-1-x^2-y^2}.$$

Le premier terme du développement de  $u$  étant 1, on a

$$u = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^3 + \varepsilon xy^2 + \dots,$$

et l'on détermine sans difficulté les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  par la méthode des coefficients indéterminés. Le développement de  $v$  se trouve ensuite à l'aide de la relation  $v = u - 1 + \varphi(x)$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} u &= 1 - \sqrt{2}x + \frac{2}{3}x^2 + y^2 - \frac{1}{18}\sqrt{2}x^3 + \sqrt{2}xy^2 - \dots, \\ v &= y^2 \left[ 1 + \sqrt{2}x + \frac{10}{3}x^2 + \frac{97}{18}\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}xy^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Il importe surtout de remarquer que tous les termes de  $v$  sont divisibles par  $y^2$ , car nous avons observé déjà que  $v$  et  $y$  s'annulent en même temps. On conclut des développements précédents

$$\begin{aligned} \sqrt{u} &= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{72}\sqrt{2}x^3 + \frac{1}{4}\sqrt{2}xy^2 + \dots, \\ \sqrt{v} &= y \left[ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{17}{12}x^2 + \frac{143}{72}\sqrt{2}x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}xy^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

A cause de  $u = v + 1 - \varphi(x)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{dv}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{dv}{dy} \end{aligned}$$

et

$$\frac{du}{dy} \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dy} \frac{d\varphi}{dx},$$

en sorte qu'il vient

$$\iint \left( \frac{ue^{-u}}{1+v} \right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du dv}{\sqrt{uv}} = 2e^{-2a} \iint e^{-n(x^2+y^2)} T dx dy,$$

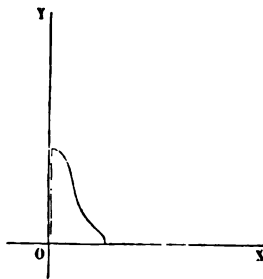
$$T = e^{\eta[\varphi(x)-v]} \frac{d}{dx} \log \varphi(x) \frac{d}{dy} (\sqrt{v}) \frac{1}{\sqrt{u}}$$

et, par le développement de T,

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iint \left( \frac{ue^{-u}}{1+v} \right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du dv}{\sqrt{uv}} \\ & = e^{-2a} \iint e^{-n(x^2+y^2)} \frac{1}{x} [\Sigma a_{rs} x^r y^s] dx dy. \end{aligned} \right.$$

L'intégration s'étend de  $x = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2}}$  et de  $y = 0$  jusqu'à certaines valeurs positives de  $x$  et de  $y$ , que nous pouvons déterminer maintenant par la condition que la série  $\Sigma a_{rs} x^r y^s$  soit absolument convergente. Il

Fig. 8.



n'est pas même nécessaire d'étendre le champ d'intégration aussi loin que possible, et il reste un grand arbitraire dans cette détermination. La seule chose essentielle à remarquer, c'est que cette détermination ne dépend en aucune façon de  $n$ . Les coefficients  $a_{rs}$  sont des polynômes en  $\eta$  et  $a_{rs} = 0$  lorsque  $s$  est impair (fig. 8).

30. En traitant d'une manière analogue l'intégrale Q, nous définissons d'abord une fonction  $\varphi_1(x)$  pour les valeurs positives de l'argu-

ment en posant

$$te^{-t} = e^{-1-x^2}, \quad t-1 = \varphi_1(x).$$

$t$  variant de 1 à  $\infty$ . Puis nous posons

$$\frac{ue^{-u}}{1+v} = e^{-1-x^2-y^2},$$

$$1-u+v = -\varphi_1(x).$$

Le long de AM (*fig. 7*)  $x$  est positif infiniment petit,  $y$  varie de 0 à  $\infty$ . Le long de AU,  $y = 0$  et  $x$  varie de 0 à  $\infty$ .

En achevant le calcul comme tout à l'heure, il vient

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iint \left( \frac{ue^{-u}}{1+v} \right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du dv}{\sqrt{uv}} \\ & = -e^{-2a} \iint e^{-n(x^2+y^2)} \frac{1}{x} [\Sigma (-1)^r a_{r,s} x^r y^s] dx dy. \end{aligned} \right.$$

L'intégration s'étend encore de  $x = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2}}$ ,  $y = 0$  jusqu'à certaines valeurs positives de  $x$  et de  $y$ . Nous pouvons maintenant, dans les formules (76) et (77), étendre l'intégration jusqu'aux mêmes limites supérieures de  $x$  et de  $y$ . En réunissant les intégrales, les parties qui deviennent infinies pour  $\varepsilon = 0$  disparaissent, et il vient

$$\begin{aligned} & \text{v. p.} \iint \left( \frac{ue^{-u}}{1+v} \right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du dv}{\sqrt{uv}} \\ & = 2e^{-2a} \iint e^{-n(x^2+y^2)} [\Sigma a_{2r+1,2s} x^{2r} y^{2s}] dx dy. \end{aligned}$$

Dans le second membre, l'intégrale

$$\iint e^{-n(x^2+y^2)} x^{2r} y^{2s} dx dy$$

ne diffère de

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-n(x^2+y^2)} x^{2r} y^{2s} dx dy$$

que par une quantité qui converge vers zéro plus rapidement qu'aucune

puissance négative de  $n$ , et nous obtenons enfin le développement cherché

$$(78) \text{ v. p. } \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \frac{ue^{-u}}{1+v} \right)^n \frac{e^{-v}}{1-u+v} \frac{du dv}{\sqrt{uv}} = \frac{\pi}{2n} e^{-2a} \left( a_{1,0} + \frac{a_{3,0} + a_{1,2}}{2n} + \dots \right).$$

Nous n'avons pas intégré, il est vrai, le long de toute la ligne de discontinuité; mais, comme le résultat auquel nous arrivons reste le même en changeant dans une certaine mesure les limites supérieures de  $x$  et de  $y$ , on voit par là même que les parties un peu éloignées de  $A$  de la ligne de discontinuité n'ajoutent à l'intégrale que des parties qu'on doit négliger tant qu'il ne s'agit que d'un développement suivant les puissances descendantes de  $n$ .

31. En exécutant les calculs que nous venons de décrire, nous avons trouvé

$$(79) \quad R_n = e^{-2a} \sqrt{\frac{4a}{\pi n^2}} \left[ \eta + \frac{2}{3} + \left( \frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \eta - \frac{179}{540} \right) \frac{1}{n} + \dots \right],$$

et de là nous concluons la résolution approchée de l'équation  $R_n = 0$  par l'une ou l'autre des formules

$$(80) \quad 2a = n - \frac{2}{3} + \frac{437}{1620n},$$

$$(81) \quad n = 2a + \frac{2}{3} - \frac{437}{3240a}.$$

Pour avoir une idée de l'approximation obtenue, nous avons calculé la racine de l'équation

$$1 + \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots = e^a \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \left[ 1 + \frac{1^2}{1 \cdot 8a} + \dots + \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-3)^2}{1 \cdot 2 \dots (n-1) (8a)^{n-1}} \right]$$

pour  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Voici les résultats :

$n$ .	Racine de $R_n = 0$ .	Valeur approximative d'après (80).	Erreur.
1.....	0,2579	0,3015	— 0,0436
2.....	0,7190	0,7341	— 0,0151
3.....	1,2038	1,2116	— 0,0078
4.....	1,6955	1,7004	— 0,0049

Pour de plus grandes valeurs de  $n$ , l'erreur diminue encore, et les formules (80), (81) suffisent pleinement à notre but.

Riemann, en donnant la série semi-convergente, écrivait

$$J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \sum_{n < 2a+1} \frac{[1.3 \dots (2n-1)]^2}{1.2 \dots n (8a)^n},$$

et il ajoutait qu'on ne peut calculer ainsi  $J(ai)$  qu'en négligeant des parties de l'ordre  $e^{-2a}$  vis-à-vis de l'unité. Le résultat auquel nous sommes arrivé confirme et précise ces indications.

$$\text{Étude de la fonction } P(a) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{e^a - 1}.$$

32. Nous allons étudier maintenant à notre point de vue le développement en série semi-convergente donné en 1861 par M. Schlömilch de la fonction

$$P(a) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{a}{n}} - 1}$$

(*Zeitschrift für Mathem. und Physik*, t. VI).

En suivant d'abord l'analyse de M. Schlömilch, nous partirons de ces formules

$$(82) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin mu}{e^{2\pi u} - 1} du = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(e^m - 1)} - \frac{1}{2m},$$

$$(83) \quad \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos mu}{e^{2\pi u} - 1} \frac{du}{u} = \frac{1}{4}m + \frac{1}{2} \log(1 - e^{-m}) - \frac{1}{2} \log m,$$

dont la première se trouve dans les *Exercices de Calcul intégral* de Legendre (t. II, p. 189). On peut l'obtenir sans difficulté à l'aide du développement

$$\frac{1}{e^{2\pi u} - 1} = \sum_1^{\infty} e^{-2\pi n u}.$$

La formule (83) se déduit de (82) par une intégration par rapport à  $m$ .

En remplaçant  $m$  par  $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots, \frac{2n}{a}$ , on déduit de (82)

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{e^{\frac{i}{a}} - 1} = a \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - n + \int_0^\infty \frac{du}{e^{2\pi u} - 1} 2 \left( \sin \frac{u}{a} + \sin \frac{2u}{a} + \dots + \sin \frac{2nu}{a} \right)$$

et

$$2 \left( \sin \frac{u}{a} + \dots + \sin \frac{2nu}{a} \right) = \sin \frac{2nu}{a} + \left( 1 - \cos \frac{2nu}{a} \right) \cot \frac{u}{2a}.$$

En ajoutant à cette équation celle-ci, qui est une conséquence de (83),

$$0 = -a \log 2n + n + a \log a + a \log \left( 1 - e^{-\frac{2n}{a}} \right) - 2a \int_0^\infty \frac{1 - \cos \frac{2nu}{a}}{e^{2\pi u} - 1} \frac{du}{u},$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{e^{\frac{i}{a}} - 1} = a \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \log 2n \right) + a \log a + a \log \left( 1 - e^{-\frac{2n}{a}} \right) + \int_0^\infty \frac{du}{e^{2\pi u} - 1} \sin \frac{2nu}{a} - \int_0^\infty \left( \frac{2a}{u} - \cot \frac{u}{2a} \right) \frac{1 - \cos \frac{2nu}{a}}{e^{2\pi u} - 1} du.$$

En faisant croître indéfiniment  $n$ , l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{du}{e^{2\pi u} - 1} \sin \frac{2nu}{a}$$

converge vers  $\frac{1}{4}$ , et l'on obtient

$$(84) \quad P(a) = a(\log a + \mathfrak{C}) + \frac{1}{4} - J_n,$$

$$J_n = \int_0^\infty \left( \frac{2a}{u} - \cot \frac{u}{2a} \right) \frac{1 - \cos \frac{2nu}{a}}{e^{2\pi u} - 1} du$$

ou

$$(85) \quad J_n = a \int_0^{\pi} \left( \frac{2}{u} - \cot \frac{u}{2} \right) \frac{1 - \cos 2nu}{e^{2\pi au} - 1} du$$

C'est en développant  $\frac{2}{u} - \cot \frac{u}{2}$ , suivant les puissances croissantes de  $u$ , que M. Schlömilch a d'abord obtenu cette série semi-convergente remarquable

$$(86) \quad J_n = \frac{B_1^2}{2 \cdot 2! a} + \frac{B_2^2}{4 \cdot 4! a^3} + \dots + \frac{B_n^2}{2n \cdot (2n)! a^{2n+1}} + R_n.$$

Mais il s'est glissé une erreur dans cette analyse, et le résultat obtenu par M. Schlömilch, que  $R_n$  ne surpasserait jamais en valeur absolue  $\frac{\pi}{2} T_{n+1}$ , est nécessairement inexacte d'après les remarques que nous avons développées dans l'Introduction.

Dans le Tome II de son *Cours d'Analyse*, M. Schlömilch est revenu sur cette série, en la rattachant cette fois à la formule sommatoire de Mac-laurin, il arrive à ce résultat que la valeur absolue de  $R_n$  ne peut surpasser

$$\frac{B_n B_{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n)} \frac{1}{a^{2n}} \left( \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4\pi^2 a^2} \right) = \frac{2n B_{n+1}}{B_n} \frac{1}{a} \left( \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4\pi^2 a^2} \right) T_n.$$

33. Pour discuter cette série à notre point de vue, nous nous servirons de cette formule

$$(87) \quad J_n = v. p. \int_0^{\pi} \frac{4av dv}{1-v^2} P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right).$$

Nous devons indiquer d'abord comment on peut passer de la formule (85) à la formule (87).

A cause de

$$\frac{2}{u} - \cot \frac{u}{2} = \sum_1^{\infty} \frac{4u}{4\pi^2 v^2 - u^2},$$

on obtient d'abord

$$J_n = \sum \int_0^{\pi} \frac{4au du}{4\pi^2 v^2 - u^2} \frac{1 - \cos 2nu}{e^{2\pi au} - 1}$$



ou

$$(88) \quad J_n = \sum \int_0^\infty \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{1 - \cos 4\pi nr v}{e^{4\pi^2 rav} - 1}.$$

Maintenant on a

$$\int_0^\infty \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{1 - \cos 4\pi nr v}{e^{4\pi^2 rav} - 1} = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon},$$

et, si nous posons pour abréger  $4\pi r = b$ ,  $4\pi^2 ra = c$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{1 - \cos nbv}{e^{cv} - 1} \\ &= \int_0^\varepsilon 4a \frac{du}{u} (1 - \cos nbu) \left[ \frac{1-u}{2-u} \frac{1}{e^{c(1-u)} - 1} - \frac{1+u}{2+u} \frac{1}{e^{c(1+u)} - 1} \right]. \end{aligned}$$

La fonction  $\frac{4a}{u} \left[ \frac{1-u}{2-u} \frac{1}{e^{c(1-u)} - 1} - \frac{1+u}{2+u} \frac{1}{e^{c(1+u)} - 1} \right]$  est finie et continue dans le voisinage de  $u = 0$ , et, en appelant M sa valeur pour une certaine valeur de  $u$  comprise entre 0 et  $\varepsilon$ , nous avons

$$\int_0^\infty \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{1 - \cos 4\pi nr v}{e^{4\pi^2 rav} - 1} = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty + M \left( \varepsilon - \frac{\sin 4\pi nr \varepsilon}{4\pi nr} \right).$$

En faisant croître  $n$  indéfiniment, les intégrales

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{\cos 4\pi nr v}{e^{4\pi^2 rav} - 1} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{\cos 4\pi nr v}{e^{4\pi^2 rav} - 1}$$

convergent vers zéro; donc

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{1 - \cos 4\pi nr v}{e^{4\pi^2 rav} - 1} \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{1}{e^{4\pi^2 rav} - 1} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{4av \, dv}{1-v^2} \frac{1}{e^{4\pi^2 rav} - 1} + M\varepsilon, \end{aligned}$$

et, en faisant tendre vers zéro  $\varepsilon$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{4av \, dv}{1 - v^2} \frac{1 - \cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav} - 1} dv = v. p. \int_0^{\infty} \frac{4av \, dv}{1 - v^2} \frac{1}{e^{4\pi^2 rav} - 1}.$$

L'équation (88) conduit donc à cette expression de  $J_{\infty}$ ,

$$J_{\infty} = v. p. \int_0^{\infty} \frac{4av \, dv}{1 - v^2} \left( \sum \frac{1}{e^{4\pi^2 rav} - 1} \right) = v. p. \int_0^{\infty} \frac{4av \, dv}{1 - v^2} P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right).$$

34. En faisant usage maintenant, dans la formule (87), de l'identité

$$\frac{1}{1 - v^2} = 1 + v^2 + v^4 + \dots + v^{2n-2} + \frac{v^{2n}}{1 - v^2},$$

nous retrouvons la série semi-convergente (86) avec cette expression du terme complémentaire

$$(89) \quad R_n = v. p. \int_0^{\infty} \frac{4av^{2n+1} \, dv}{1 - v^2} P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right).$$

En effet, on trouve

$$(90) \quad \int_0^{\infty} v^{2k-1} P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right) dv = \frac{1}{4} \frac{B_k^2}{2^k (2k)!} \frac{1}{a^{2k}},$$

en substituant pour la fonction  $P$  la série qui sert de définition et en faisant usage de la relation connue

$$(91) \quad \int_0^{\infty} \frac{v^{2k-1} \, dv}{e^{2m\pi v} - 1} = \frac{B_k}{4k} \frac{1}{m^{2k}}.$$

35. L'expression du terme complémentaire que nous venons d'obtenir donne facilement la résolution approchée de  $R_n = 0$ . On a

$$P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right) = e^{-4\pi^2 av} + 2e^{-8\pi^2 av} + \dots = \sum f(n) e^{-4n\pi^2 av},$$

$f(n)$  désignant le nombre des diviseurs de  $n$ . Mais, quand il s'agit de

développer la racine de  $R_n = 0$ , suivant les puissances descendantes de  $n$ , on ne doit retenir que le premier terme  $e^{-i\pi^2 a v}$ . Après les explications du n° 16, où se présentait un cas analogue à l'occasion du développement de  $\log \Gamma(ai)$ , il ne semble pas nécessaire d'insister plus longtemps sur ce point, car cela reviendrait à répéter à peu près ce que nous avons dit là. La résolution approchée de

$$\text{v. p.} \int_0^\infty \frac{v^{2n+1} e^{-i\pi^2 a v} dv}{1 - v^2} = 0$$

se déduit aussitôt du résultat du n° 8, par un simple changement de lettres, et il vient

$$(92) \quad 4\pi^2 a = 2n + \frac{5}{6} + \frac{199}{3240(2n+1)},$$

$$(93) \quad n = 2\pi^2 a - \frac{5}{12} - \frac{199}{25920\pi^2 a},$$

et la valeur approchée de  $R_n$ , en posant  $2\pi^2 a = n + \eta$ ,

$$(94) \quad R_n = 8ae^{-i\pi^2 a} \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \left( \eta - \frac{5}{12} \right).$$

On peut, du reste, négliger le petit terme  $\frac{199}{25920\pi^2 a}$  dans (93), et prendre ainsi simplement  $2\pi^2 a - \frac{5}{12}$  pour valeur approchée de la racine de  $R_n = 0$ .

36. Les expressions précédentes montrent l'extrême approximation que la série semi-convergente permet d'obtenir. L'ordre d'approximation est  $e^{-i\pi^2 a} \sqrt{\frac{8a}{\pi}}$ , et déjà, pour  $a = 1$ , l'erreur ne porterait que sur la dix-septième décimale. Aussi nous prenons pour exemple cette valeur beaucoup plus petite  $a = \frac{1}{4}$ . On trouve  $N = 4,52$  : il faut donc prendre quatre termes et ajouter encore le cinquième terme, multiplié par une fraction  $\lambda$  approximativement égale à 0,52. On obtient ainsi

$$P\left(\frac{1}{4}\right) = 0,0190210 - 0,0000415\lambda,$$

et, pour  $\lambda = 0,52$ ,

$$P\left(\frac{1}{4}\right) = 0,0189994;$$

la valeur exacte est

$$0,0189992.$$

L'approximation avec laquelle nous avons résolu l'équation  $R_n = 0$  ne laisse rien à désirer.

---

# APPLICATIONS

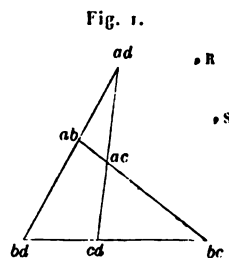
## DE LA

# THÉORIE DES CUBIQUES GAUCHES,

PAR M. C. GUICHARD,  
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

---

1. Considérons un tétraèdre ABCD et un plan P. Prenons les traces des six arêtes du tétraèdre sur le plan P. Nous désignerons chacune de ces traces par les deux petites lettres qui correspondent à celles de l'arête. Les six points ainsi obtenus sont les six sommets d'un quadrilatère complet (*fig. 1*). On voit facilement que, réciproquement, tout quadrilatère complet peut s'obtenir ainsi.



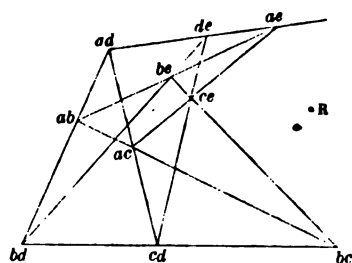
Cela posé, par deux points R et S du plan P et par les quatre points A, B, C, D, faisons passer une cubique. Du point A projetons la cubique sur le plan P. Elle se projette suivant une conique circonscrite au triangle *ab ac ad* et passant par R et S. On pourra de même projeter la cubique des points B, C et D sur le plan P. On obtient ainsi quatre coniques passant par R et S et circonscrites aux quatre triangles du quadrilatère complet. Il est clair que toutes ces coniques passent par le

troisième point d'intersection de la cubique avec le plan. D'où le théorème suivant, qui est bien connu :

*Les quatre coniques, circonscrites aux quatre triangles d'un quadrilatère complet et passant par deux points arbitraires, ont un troisième point commun.*

2. Prenons maintenant cinq points quelconques A, B, C, D, E et un plan P. Considérons toutes les droites qui joignent ces cinq points deux à deux, puis marquons leurs traces sur le plan P. Les dix points ainsi obtenus donnent une figure composée de deux triangles homologues, de leur centre et de leur axe d'homologie (*fig. 2*).

Fig. 2.



Dans cette figure, on peut trouver cinq quadrilatères :

- |    |                   |
|----|-------------------|
| 1° | $ab\ ac\ ad\ ae;$ |
| 2° | $ab\ bc\ bd\ be;$ |
| 3° | $ac\ bc\ cd\ ce;$ |
| 4° | $ad\ bd\ cd\ de;$ |
| 5° | $ae\ be\ ce\ de.$ |

On voit facilement que toute figure analogue peut s'obtenir par cette méthode.

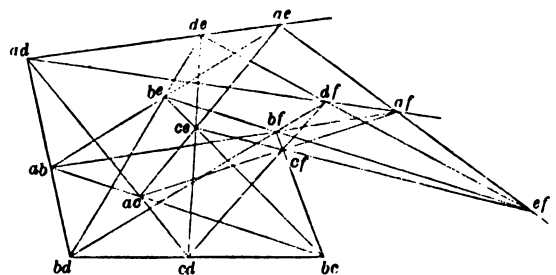
Cela posé, par les cinq points A, B, C, D, E et un point arbitraire R du plan P, faisons passer une cubique; puis projetons successivement cette cubique des points A, B, C, D, E sur le plan P. On obtient ainsi cinq coniques passant par R et circonscrites aux cinq quadrilatères. Toutes ces coniques passent évidemment par les deux autres points

d'intersection de la cubique avec le plan, ce qui donnerait un nouveau théorème relatif à la *fig. 2*.

Par cette méthode, à chaque point R du plan P on fait correspondre deux points S et T du même plan; à un autre point R' correspondront de même deux autres points S' et T'. Nous allons démontrer que les six points R, S, T; R', S', T' sont situés sur une même conique. En effet, par les neuf points A, B, C, D, E, S, T, S', T', on peut faire passer une surface du second ordre. Cette surface contient sept points de la cubique A, B, C, D, E, R, S, T; elle la contient entièrement et, par suite, passe par le point R. On voit de même qu'elle passe par R', ce qui démontre le théorème énoncé.

3. On pourrait maintenant prendre six points A, B, C, D, E, F, puis marquer les traces des droites qui les joignent deux à deux sur le plan P. Les quinze points ainsi obtenus donnent une figure composée de trois triangles homologiques deux à deux, des trois points de rencontre de leur côtés et de leurs trois centres d'homologie (*fig. 3*).

Fig. 3.



Dans cette figure se trouvent six pentagones :

- |    |                       |
|----|-----------------------|
| 1° | $ab\ ac\ ad\ ae\ af;$ |
| 2° | $ab\ bc\ bd\ be\ bf;$ |
| 3° | $ac\ bc\ cd\ ce\ cf;$ |
| 4° | $ad\ bd\ cd\ de\ df;$ |
| 5° | $ae\ be\ ce\ de\ ef;$ |
| 6° | $af\ bf\ cf\ df\ ef.$ |

Cela posé, par les six points A, B, C, D, E, F faisons passer une cubique; puis projetons successivement cette cubique des points A, B, C, D, E, F sur le plan P. On obtiendra ainsi six coniques circonscrites respectivement aux six pentagones de la *fig.* 3. Il est clair que toutes ces coniques passent par les trois points d'intersection de la cubique avec le plan P.



---

APPLICATIONS DE LA THERMODYNAMIQUE  
AUX  
PHÉNOMÈNES THERMO-ÉLECTRIQUES  
ET  
PYRO-ÉLECTRIQUES,  
PAR P. DUHEM.

---

DEUXIÈME PARTIE.  
PHÉNOMÈNES PYRO-ÉLECTRIQUES <sup>(1)</sup>.

---

I. — Historique.

Vers la fin du xvii<sup>e</sup> siècle, les Hollandais rapportèrent de Ceylan une pierre curieuse que les indigènes nommaient *tournamal*, c'est-à-dire *tire-cendres*, à cause de la propriété qu'elle possède d'attirer les cendres lorsqu'on la jette dans le feu. C'est la pierre qui est connue aujourd'hui en Minéralogie sous le nom de *tourmaline*.

Lémery en donna la première description en 1717. En 1756, OEpinus montra que les propriétés de la tourmaline sont dues à un développement d'électricité, et que les deux extrémités d'un cristal chauffé sont toujours électrisées en sens contraire, l'une positivement, l'autre négativement. Bergmann montra plus tard que les électricités de signe contraire qui se dégagent aux deux extrémités d'une tourmaline chauffée sont toujours égales en quantité.

En 1759, Canton <sup>(2)</sup> fit l'observation que l'électrisation d'une tour-

---

<sup>(1)</sup> Voir première Partie : *Phénomènes thermo-électriques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 405).

<sup>(2)</sup> *Philosophical Transactions*, vol. LI, p. 403.

maline n'est pas due à la température même, mais à ses variations. Un cristal de tourmaline étant porté à une température déterminée et ramené à l'état neutre demeurera à l'état neutre tant que la température ne subira aucune variation; mais il s'électrisera immédiatement si la température vient à changer, et les effets d'électrisation obtenus seront de sens contraire selon que l'on chauffe le cristal ou qu'on le laisse refroidir. Cette observation est capitale; c'est peut-être la plus importante qui ait été faite dans cet ordre de phénomènes dont elle marque le caractère particulier.

Gaugain (1) a étudié avec le plus grand soin le dégagement d'électricité auquel donne lieu la tourmaline lorsqu'elle s'échauffe ou se refroidit. Il est arrivé à des conclusions très précises que nous allons rappeler brièvement :

1° On peut charger un condensateur lorsque l'on met les deux pôles d'une tourmaline qui s'échauffe ou se refroidit en communication avec les deux plateaux du condensateur.

2° La quantité d'électricité que peut développer une batterie de tourmalines accouplées par leurs pôles de même nom est égale à la somme des quantités que fourniraient les éléments séparés.

3° Une pile de tourmalines superposées développe exactement la même quantité d'électricité que l'un quelconque des éléments qui servent à la former.

4° La quantité d'électricité développée par un prisme de tourmaline est proportionnelle à sa section et indépendante de sa longueur.

5° La *vitesse du développement électrique* (c'est-à-dire la quantité d'électricité qui se produirait pendant l'unité de temps si la production se maintenait telle qu'elle est à un instant donné) est proportionnelle à la vitesse du refroidissement qui appartient au même instant.

Donc la quantité d'électricité que développe une tourmaline lorsque la température s'abaisse d'un nombre de degrés déterminés est indépendante du temps que le refroidissement met à s'opérer.

---

(1) GAUGAIN, *Comptes rendus*, t. XLII, p. 1264 (1856); t. XLIII, p. 916 et 1122 (1856); t. XLIV, p. 628 (1857). — *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LVII, p. 5 (1859).

6° La quantité d'électricité que produit une tourmaline, lorsque sa température s'élève d'un nombre donné de degrés, est précisément la même que celle qui résulterait d'un abaissement de température égal.

Dans toutes les expériences de Gaugain, on voit une tourmaline qui s'échauffe ou se refroidit se comporter comme une pile d'une grande force électromotrice, mais en même temps d'une grande résistance; cette analogie est complétée par les expériences de M. E. du Bois-Reymond (<sup>1</sup>), qui a obtenu un courant sensible en plaçant une lame de tourmaline chaude entre deux lames de platine réunies par un fil métallique.

Les phénomènes pyro-électriques ne sont pas particuliers à la tourmaline; on les a observés aussi sur un grand nombre de cristaux, mais à un degré moins élevé. Canton avait déjà reconnu les mêmes propriétés dans la topaze et l'émeraude du Brésil; Brard, dans l'axinite; Haüy dans la boracite, le mésotype, l'oxyde de zinc, la prehnite, le sphène; Brewster, dans beaucoup d'autres minéraux naturels, tels que le spath calcaire, le béryl, le spath fluor, le quartz, et dans plusieurs cristaux artificiels, parmi lesquels le tartrate double de potasse et de soude et l'acide tartrique.

Toutes ces recherches ont conduit à une importante corrélation entre la forme cristalline et les phénomènes pyro-électriques. Haüy (<sup>2</sup>) a remarqué, le premier, que les substances cristallisées qui possèdent les propriétés pyro-électriques, telles que la tourmaline et la boracite, dérogent à la loi de symétrie et sont frappées d'hémiédrie. Cette observation a été ensuite confirmée et généralisée en particulier par les nombreuses expériences de Riess et Rose (<sup>3</sup>). On peut regarder aujourd'hui la pyro-électricité comme intimement liée à l'hémiédrie à faces inclinées ou *hémimorphisme*. Lorsqu'on chauffe le cristal, les extrémités de l'axe d'hémimorphisme prennent des électricités contraires; l'axe d'hémimorphisme est dit *axe de pyro-électricité*.

(<sup>1</sup>) V. RIESS, *Reibungselektricität*, vol. II, p. 475.

(<sup>2</sup>) HAÜY, *Traité de Minéralogie*, t. III, p. 54. — *Annales de Chimie et de Physique*, 1<sup>re</sup> série, t. IX, p. 59.

(<sup>3</sup>) *Archives d'électricité*, t. III, p. 585.

*Ann. de l'Éc. Normale*. 3<sup>e</sup> Série. Tome III. — AOÛT 1886.

En 1866, M. Hankel <sup>(1)</sup> publia une longue série de recherches sur la pyro-électricité des cristaux. Ces recherches conduisaient à cette conséquence que l'axe de pyro-électricité est une droite déterminée *de direction et de position*, tandis qu'en cristallographie toutes les droites sont déterminées seulement en direction.

MM. Friedel et J. Curie <sup>(2)</sup> montrèrent que les phénomènes singuliers observés par M. Hankel devaient s'expliquer par un échauffement irrégulier des cristaux étudiés qui, en altérant la symétrie de structure de ces cristaux, les douait d'une *pyro-électricité accidentelle*.

MM. Friedel et J. Curie poussèrent plus loin ces recherches; ils montrèrent que la pyro-électricité accidentelle était extrêmement fréquente, qu'elle était la cause véritable d'une foule de phénomènes attribués à la pyro-électricité normale. Partant de ce principe, auquel MM. P. et J. Curie avaient été conduits par des expériences dont nous parlerons plus loin, qu'une lame cristalline développe une quantité d'électricité proportionnelle à la dilatation de la substance dans la direction normale à la lame et au cosinus de l'angle que cette direction fait avec l'axe d'hémiédrie, ils n'hésitèrent pas à déclarer que la pyro-électricité du quartz et des substances cubiques, telles que la blende et le chlorate de sodium, qui présentent l'hémiédrie tétraédrique ou la tétartoédrie, était purement accidentelle et due à un échauffement irrégulier. En effet, l'expérience montra que ces substances ne donnaient aucun signe de pyro-électricité lorsqu'on les échauffait régulièrement <sup>(3)</sup>. L'étude de la pyro-électricité de la boracite donna aux vues de MM. Friedel et J. Curie une nouvelle confirmation.

Les idées de MM. Friedel et J. Curie ont été exposées par M. Mallard dans son *Traité de Cristallographie* <sup>(4)</sup>. M. Mallard en a déduit la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cristal jouisse de la pyro-électricité normale : le cristal ne doit pas avoir de centre et ne doit présenter qu'un seul axe de symétrie.

<sup>(1)</sup> VII<sup>e</sup> Abhandlung des VIII<sup>ten</sup> Bandes der *Abhandlungen der Mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*. Leipzig; 1866. — Voir aussi : G. WIEDEMANN, *Die Lehre von der Elektrizität*, II Band, p. 320.

<sup>(2)</sup> FRIEDEL et CURIE, *Bulletin de la Société minéralogique*, vol. V, p. 282; 1882.

<sup>(3)</sup> CH. FRIEDEL et J. CURIE, *Bulletin de la Société minéralogique de France*, t. V, p. 282 (1882); t. VI, p. 191 (1883).

<sup>(4)</sup> MALLARD, *Traité de Cristallographie*, vol. II, p. 571.

Nous avons indiqué l'idée qui avait amené MM. Friedel et J. Curie à distinguer la pyro-électricité naturelle et la pyro-électricité artificielle. Cette idée avait été émise par MM. P. et J. Curie comme conclusion de leurs expériences sur la *Piézo-électricité*.

MM. P. et J. Curie (') ont observé qu'en comprimant une lame de tourmaline dans le sens de l'axe ternaire, les faces normales à cet axe se chargent d'électricité de noms contraires. Lorsqu'on détend la lame après l'avoir ramenée à l'état neutre, on observe un nouveau dégagement d'électricité, mais en sens contraire du précédent.

« Pour tous les cristaux, les effets produits par compression, disaient MM. Curie, sont de même sens que ceux produits par le refroidissement; ceux dus à une décompression sont de même sens que ceux dus à un échauffement.

» Il y a là une relation évidente qui permet, dans les deux cas, de rapporter les phénomènes à une cause unique et de les réunir dans l'énoncé suivant :

» *Quelle que soit la cause déterminante, toutes les fois qu'un cristal hémiedre à faces inclinées, non conducteur, se contracte, il y a formation de pôles électriques dans un certain sens; toutes les fois que ce cristal se dilate, le dégagement d'électricité a lieu en sens contraire.*

» Si cette manière de voir est exacte, les effets dus à la compression doivent être de même sens que ceux dus à l'échauffement dans une substance possédant, suivant l'axe d'hémiédrie, un coefficient de dilatation négatif. »

MM. P. et J. Curie montrèrent ensuite (') que les phénomènes piézo-électriques présentés par la tourmaline obéissent aux lois suivantes :

I. Les deux extrémités d'une tourmaline dégagent des quantités d'électricité égales entre elles, mais différentes de signe.

II. La quantité d'électricité mise en liberté par une certaine augmentation de pression est égale à celle que produit une égale diminution de pression, mais de signe contraire.

III. Cette quantité est proportionnelle à la variation de pression.

IV. Elle est indépendante de la longueur de la tourmaline.

---

(') P. et J. CURIE, *Comptes rendus*, t. XCI, p. 294; 1880.

V. Pour une même variation de pression par unité de surface, elle est proportionnelle à la surface.

MM. P. et J. Curie <sup>(1)</sup> ont étudié également les phénomènes piézo-électriques du quartz. Nous n'insisterons pas ici sur leurs expériences, nous réservant d'y revenir lorsque nous en ferons la théorie. Nous nous contenterons également d'indiquer les recherches plus récentes de M. Rontgen <sup>(2)</sup> sur le même sujet.

M. Lippmann <sup>(3)</sup> a montré que, en vertu du premier principe de la Théorie mécanique de la chaleur, les phénomènes découverts par MM. Curie entraînaient la conséquence suivante : lorsqu'on charge d'électricités contraires les deux extrémités d'un cristal hémiedre, ce cristal subit une déformation inverse de celle qui déterminerait à sa surface une charge électrique identique à celle qu'on lui a communiquée.

Peu de temps après, MM. P et J. Curie <sup>(1)</sup> vérifiaient l'exactitude de cette proposition. Les déformations électriques subies par un cristal étaient manifestées dans leurs expériences par les phénomènes de piézo-électricité qu'elles déterminaient dans un autre cristal.

Plus récemment, M. Rontgen <sup>(5)</sup> et M. Kundt <sup>(6)</sup> ont vérifié les déformations électriques du quartz en faisant usage des phénomènes de double réfraction.

Nous venons d'esquisser rapidement l'exposé de nos connaissances touchant les phénomènes pyro-électriques. Cet exposé, tout incomplet qu'il est, montre que ces phénomènes forment aujourd'hui un groupe curieux et important dans l'ensemble des faits qu'embrasse la science de l'Électricité. Existe-t-il une théorie permettant de relier tous ces faits entre eux ? Jusqu'ici, la Physique ne possède à cet égard que quelques aperçus dus à Gauguin et à Sir W. Thomson.

<sup>(1)</sup> P. et J. CURIE, *Comptes rendus*, t. XCI, p. 383 (1880); t. XCII, p. 350 (1881) t. XCIII, p. 204 (1881).

<sup>(2)</sup> RONTGEN, *Ber. der Oberrh. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde*, XII (*Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. XVIII, p. 213 et 534; 1883).

<sup>(3)</sup> G. LIPPMANN, *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. XXIV, p. 145; 1881.

<sup>(4)</sup> P. et J. CURIE, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1137 (1881); t. XCV, p. 914 (1882).

<sup>(5)</sup> RONTGEN, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. XVIII, p. 213 et 534; 1883.

<sup>(6)</sup> KUNDT, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. XVIII, p. 228; 1883.

Gaugain avait cherché dans les phénomènes thermo-électriques des faits analogues à ceux que l'on attribue à la pyro-électricité. Les idées qu'il avait émises et les expériences qu'il avait instituées sont exposées dans tous les Traités de Physique; néanmoins les idées de Gaugain paraissent aujourd'hui abandonnées.

D'après Sir W. Thomson (<sup>1</sup>), une tourmaline est *toujours, même lorsque tous ses points sont à une même température constante*, dans un état de polarisation électrique équivalent à deux couches d'électricité de signe contraire, réparties sur les deux extrémités. Si elle semble à l'état neutre lorsque sa température ne varie pas, c'est que le milieu prend, au bout d'un certain temps, une électrisation inverse, qui neutralise pour tout corps extérieur l'action de la tourmaline. Lorsque la température de la tourmaline varie, cet équilibre est rompu, et l'électrisation devient apparente.

Cette explication de Sir W. Thomson fait intervenir une neutralisation, due à l'électrisation du milieu, qui ne présente d'analogie avec aucun autre phénomène électrique (<sup>2</sup>).

Dans ce qui va suivre, nous tenterons d'établir, au moyen des principes fondamentaux de la Thermodynamique, une théorie qui relie ensemble les principaux phénomènes pyro-électriques et piézo-électriques.

## II. — Nécessité d'admettre la structure réticulaire des corps.

Imaginons une lame cristalline à faces parallèles; supposons les dimensions de ces faces assez grandes par rapport à l'épaisseur de la plaque pour que nous puissions ne tenir aucun compte des phénomènes qui se produisent sur les bords de la plaque. Si tous les points

---

(<sup>1</sup>) SIR W. THOMSON, *Philosophical Magazine*, 5<sup>e</sup> série, t. V, p. 24; 1878. — *Cyclopædia of the Physical Sciences*, 2<sup>e</sup> édition; 1860. — *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie*, t. II, p. 76.

(<sup>2</sup>) Dans un Mémoire publié postérieurement à la rédaction de notre travail (*Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. XXVIII, p. 43, avril 1886), M. Riecke a développé la théorie de Sir W. Thomson. Nous nous proposons d'examiner cette théorie, dans un travail ultérieur, plus complètement que nous n'avons pu le faire ici et de montrer qu'elle ne suffit pas à expliquer les phénomènes pyro-électriques.

de la plaque ne sont pas à la même température, nous supposerons que les surfaces isothermes soient des plans parallèles aux faces de la plaque. Les deux faces de la plaque seront supposées à une même température; cette température sera moindre que celle des parties internes de la plaque, si la plaque est soumise à un refroidissement; elle leur sera supérieure si la plaque est soumise à un réchauffement.

Les choses étant dans cet état, il s'agit d'expliquer comment les deux faces de la lame, supposées identiques, peuvent présenter une différence de niveau potentiel, ainsi qu'il résulte de l'expérience de Gaugain, et comment ces deux faces, mises en communication l'une avec l'autre par un fil métallique, donnent naissance à un courant, ainsi qu'il résulte de l'expérience de M. E. du Bois-Reymond.

Soient M et M' deux points pris sur les deux faces de la lame; soient V et V' les niveaux potentiels en ces deux points, où la nature de la substance est supposée la même; posons

$$(1) \quad \varepsilon(V - V') = \mathcal{C}.$$

D'après le § II de la première Partie de ce Mémoire <sup>(1)</sup>, nous savons que, si l'on réunit les deux faces de la lame par un fil métallique dont tous les points sont à la même température, le circuit fermé sera le siège d'un courant permanent; la force électromotrice qui tend à faire passer ce courant du point M au point M' au travers de la lame cristalline a pour valeur  $\mathcal{C}$ . L'explication du courant observé par M. E. du Bois-Reymond est ramenée à l'explication de la différence de niveau potentiel entre les deux extrémités d'une tourmaline chauffée.

Or, des principes posés relativement à la valeur de  $\mathcal{C}$  dans le § III de la première Partie, il résulte :

1° Que  $\mathcal{C}$  est identiquement nul, quelle que soit la constitution de la plaque, si tous les points de cette plaque sont à la même température;

2° Que  $\mathcal{C}$  est identiquement nul, quelle que soit la distribution des températures dans la plaque, si cette dernière est formée d'un milieu homogène.

De la première proposition, il faut conclure que les phénomènes

---

<sup>(1)</sup> *Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 414.



pyro-électriques ne peuvent se manifester que lorsque la plaque se réchauffe ou se refroidit.

De la seconde, il faut conclure que les phénomènes pyro-électriques demeurent inexplicables si l'on se représente la matière qui constitue les substances pyro-électriques comme formée par un milieu homogène.

Cette conclusion paraîtra peut-être inattendue; toutefois, si l'on remarque que les phénomènes pyro-électriques sont intimement liés à la forme cristalline, il semblera naturel que l'hypothèse de l'absolue homogénéité de la matière masque la raison d'être des phénomènes pyro-électriques comme elle masque la raison d'être de la forme cristalline.

Bravais a montré que l'on était conduit fort simplement aux lois de la cristallographie si l'on admettait que la matière possède une structure périodiquement variable à laquelle il a donné le nom de *structure réticulaire*; on est porté à se demander si l'hypothèse de la structure réticulaire des corps ne conduirait pas aussi à l'explication des phénomènes pyro-électriques. C'est à cette question que nous chercherons à donner une réponse dans ce qui va suivre.

Nous n'exposerons pas ici les propriétés bien connues des systèmes réticulaires. Nous ne ferons aucune restriction sur la manière dont varie la constitution de la matière à l'intérieur de l'une des mailles du réseau; cette constitution pourra varier d'une manière continue ou discontinue.

### III. — Surface de pyro-électricité.

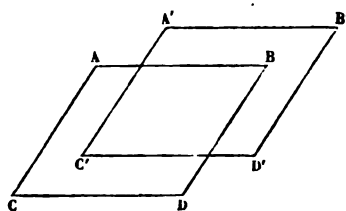
A l'intérieur d'un solide, dont nous admettons la constitution réticulaire, traçons un plan que nous supposerons tout d'abord être un plan réticulaire. Comme il suffit de changer infiniment peu l'orientation d'un plan quelconque pour le faire coïncider avec un plan réticulaire, nous nous contenterons, dans ce qui va suivre, d'étudier des plans réticulaires; nous étendrons ensuite, par voie de continuité, à tous les plans possibles, les résultats que nous aurons obtenus.

Les nœuds du réseau forment sur le plan que nous considérons des sommets de mailles parallélogrammes. Le rapport d'un côté de la maille à la plus courte distance qui puisse exister entre deux nœuds

pris à l'intérieur du solide peut être considérable. Mais, comme la plus courte distance qui puisse exister entre deux nœuds est assurément une grandeur d'une extrême petitesse, nous admettrons que les côtés de la maille dont nous parlons sont encore très petits par rapport aux longueurs que l'on peut mesurer dans les expériences qui nous occupent.

Soit ABCD (*fig. 1*) une maille du plan réticulaire que nous considérons. Dans ce même plan, traçons un autre parallélogramme A'B'C'D' égal au premier et semblablement placé. Il est très facile de voir, d'après la périodicité que présente la structure du solide, que tout point pris à l'intérieur du parallélogramme A'B'C'D' est homologue d'un point pris à l'intérieur du parallélogramme ABCD.

Fig. 1.

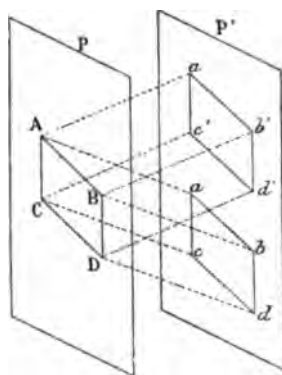


Supposons que tous les points du plan que nous considérons soient à la même température. Concevons qu'une charge électrique  $q$ , d'abord uniformément distribuée sur le parallélogramme ABCD se déplace dans le plan considéré de manière à venir se distribuer uniformément à la surface du parallélogramme A'B'C'D'. Il est aisé de voir que, dans ces conditions, la modification dont nous venons de parler ne produit aucun travail compensé. En effet, le transport électrique s'étant effectué par l'intermédiaire de points qui sont tous à la même température, le travail compensé dépend uniquement de l'état initial et de l'état final du système, et nullement de la manière dont s'est effectué le changement d'état. Il est donc le même que si chacune des charges électriques avait passé du point où elle se trouvait à l'intérieur du parallélogramme ABCD au point homologue A'B'C'D'. Mais, d'après les principes posés dans la première Partie, lorsqu'une charge électrique passe, par l'intermédiaire de points qui sont tous à la même

température, d'un point à un autre point ayant la même nature que le premier, elle ne produit aucun travail compensé. La proposition que nous avons énoncée peut donc être regardée comme démontrée.

Concevons maintenant un second plan réticulaire parallèle au précédent. Les nœuds du réseau dessinent sur ce nouveau plan les sommets de parallélogrammes égaux au parallélogramme ABCD et semblablement placés. Soit  $abcd$  un de ces parallélogrammes (*fig. 2*).

Fig. 2.



Supposons en premier lieu que les deux plans considérés et l'espace qu'ils comprennent entre eux présentent la même température en tous leurs points. Supposons qu'une charge électrique soit tout d'abord distribuée uniformément sur le parallélogramme ABCD, puis que toutes les particules qui composent cette charge soient déplacées parallèlement à une certaine direction  $Aa'$  jusqu'à la rencontre du nouveau plan réticulaire. La charge viendra alors se distribuer uniformément sur un parallélogramme  $a'b'c'd'$  égal au parallélogramme  $abcd$  et semblablement placé. Il est aisé de voir que cette nouvelle modification n'entraîne encore aucun travail compensé ; en effet, puisque aucune différence de température n'entre en considération, il est permis, pour évaluer le travail compensé, de remplacer la modification par deux autres modifications conduisant le système du même état initial au même état final : c'est ce que nous ferons de la manière suivante. Nous supposerons que les diverses particules électriques se soient, en premier lieu, déplacées parallèlement à la direction  $Aa$  ; ce déplacement

a amené chacune d'elles du point qu'elle occupait à la surface du parallélogramme ABCD au point homologue du parallélogramme  $abcd$  ; cette première modification n'a produit aucun travail compensé ; nous supposons ensuite que la charge électrique ainsi répartie sur le parallélogramme  $abcd$  vienne, en se déplaçant dans le plan de ce parallélogramme, se distribuer sur le parallélogramme  $a'b'c'd'$  ; d'après ce que nous avons démontré tout à l'heure, cette seconde modification ne produit encore aucun travail compensé. La modification qui résulte de ces deux-là ne produit donc pas davantage de travail compensé.

Examinons maintenant ce qui advient lorsque la température n'est plus la même aux divers points du corps.

Nous supposons que chacun des deux plans réticulaires ait la même température en tous ses points, mais que la température ne soit pas la même sur les deux plans. Nous supposons en outre ces deux plans extrêmement rapprochés, en sorte que la température ne variera que très peu de l'un à l'autre. Le corps étant placé dans une position bien déterminée et les deux plans étant supposés de front, comme dans la *fig. 2*, nous supposons enfin, pour fixer les idées, que le plan le plus chaud soit à droite du plan le plus froid ; nous désignerons par  $\delta T$  l'excès très petit de la température du premier sur la température du second.

Cela étant, supposons que la charge  $q$ , distribuée uniformément sur le parallélogramme ABCD, tracé à la surface du plan le plus froid, se porte sur le parallélogramme  $a'b'c'd'$ , comme nous l'avons supposé tout à l'heure ; évaluons le travail compensé engendré dans cette modification.

Les points traversés par les charges électriques en mouvement ayant des températures extrêmement peu différentes les unes des autres, on peut encore, pour calculer le travail compensé, décomposer la modification en deux autres qui aient pour effet d'amener le système du même état initial au même état final. Adoptons le même mode de décomposition que dans le cas précédent. La deuxième modification n'entraînera aucun travail compensé ; le travail compensé que nous voulons calculer se réduira donc au travail compensé que produit la charge  $q$ , d'abord uniformément distribuée sur le parallélogramme ABCD, en se transportant d'un plan à l'autre parallèlement à la direction  $Aa$  ; il est par con-

séquent indépendant de la direction parallèlement à laquelle s'est effectué le transport de l'électricité entre les deux plans isothermes.

Lorsque  $\delta T = 0$ , le travail que nous voulons calculer est, comme nous l'avons démontré, égal à zéro; nous pouvons donc le regarder comme proportionnel à  $\delta T$ . D'ailleurs, il est évidemment proportionnel à  $q$ . Si nous désignons par  $\omega$  l'aire du parallélogramme ABCD, par  $\theta = \frac{q}{\omega}$  la densité superficielle de l'électricité lorsque la charge  $q$  est répartie uniformément sur ce parallélogramme, le travail compensé  $\delta \epsilon$  que nous voulons évaluer pourra être représenté par la formule

$$(2) \quad \delta \epsilon = \rho \omega \theta \delta T.$$

Nous allons étudier les propriétés de la quantité  $\rho$ .

Il est d'abord évident que si, sans changer  $\delta T$ , nous changions la température  $T$  du plan le plus froid,  $\rho$  pourrait changer de valeur, en sorte que nous devons regarder  $\rho$  comme une fonction de  $T$ .

Si l'on renversait le sens du mouvement de l'électricité, sans changer le sens dans lequel varie la température, il est aisé de voir que  $\delta \epsilon$  changerait de signe sans changer de valeur absolue. Il suffit, pour le démontrer, de faire passer la charge  $q$  du parallélogramme ABCD au parallélogramme  $abcd$ , puis de la faire revenir au premier; le système n'ayant pas changé, l'entropie aura gardé la même valeur, et, comme la modification a été produite dans un espace dont tous les points ont des températures extrêmement peu différentes, le travail compensé produit doit être nul. On pourra donc, dans la formule précédente, regarder  $\rho$  comme indépendant du sens dans lequel on a déplacé l'électricité, pourvu qu'on change le signe de  $\theta$  quand on renverse le sens du déplacement.

Mais s'il est permis, dans la formule précédente, de changer le signe de  $\theta$  ou le sens de parcours de l'électricité sans changer la valeur de  $\rho$ , il n'est pas permis, sans changer la valeur de  $\rho$ , de changer le signe de  $\delta T$ , c'est-à-dire le sens dans lequel varie la température. *Rien ne démontre que la quantité  $\rho$  garde la même valeur lorsque les températures, au lieu de croître de la gauche vers la droite, croissent de la droite vers la gauche.*

Toutefois, si la structure que le corps présente à l'intérieur d'une maille

*du réseau présente une symétrie droite ou oblique par rapport à un plan parallèle aux plans isothermes mené par le centre de la maille, la quantité  $\rho$  gardera évidemment la même valeur lorsque l'on renversera l'ordre de variation des températures sans faire varier l'orientation des plans isothermes.*

Ces deux remarques sont, comme nous le verrons dans la suite, le fondement de la théorie des phénomènes pyro-électriques.

L'orientation d'un plan réticulaire isotherme sera définie par la direction d'une normale à ce plan, menée dans le sens où les températures croissent. Nous pourrions dire alors que la quantité  $\rho$  ne garde pas nécessairement la même valeur lorsqu'on remplace l'orientation des plans réticulaires isothermes par l'orientation inverse.

Plus généralement, si l'on remplace un système de plans réticulaires isothermes par un autre système de plans réticulaires isothermes, en d'autres termes si l'on change l'orientation, la quantité  $\rho$  pourra changer de valeur.

Les considérations que nous venons d'exposer supposent qu'à l'intérieur du solide considéré les surfaces isothermes sont des plans, hypothèse simple que nous conserverons dans ce qui va suivre ; mais elles supposent en outre que ces plans sont des plans réticulaires, restriction dont il faut nous affranchir ; il suffit pour cela de donner aux énoncés précédents une forme telle qu'on puisse les étendre par voie de continuité aux plans non réticulaires.

Envisageons à la surface d'un plan réticulaire un ensemble de mailles ayant une aire totale  $\Omega$  ; prenons le contour de cette aire pour directrice d'un cylindre, droit ou oblique, dirigé, par exemple, vers les parties du corps où la température est plus élevée ; limitons ce cylindre par un deuxième plan réticulaire parallèle au premier ; supposons que du premier plan au second la température aille sans cesse au croissant.

Supposons qu'une charge électrique distribuée avec la densité  $\theta$  sur la surface  $\Omega$  se transporte, parallèlement aux génératrices du cylindre, jusqu'à la deuxième base de ce cylindre. Le travail compensé effectué est égal, d'après ce qui précède, à

$$\mathfrak{E} = \Omega \theta \sum \rho \delta T.$$

Il n'y a plus alors aucune difficulté à étendre cette expression au cas où les surfaces isothermes sont des plans quelconques.

Sur un plan isotherme traçons une surface finie d'aire  $\Omega$ . Soit  $T_0$  la température du plan isotherme en question. Prenons le contour de la surface  $\Omega$  pour directrice d'un cylindre droit ou oblique. Limitons ce cylindre par un deuxième plan isotherme de température  $T$ . Supposons qu'une charge électrique répandue uniformément avec une densité  $\theta$  sur la surface  $\Omega$  se transporte, parallèlement aux génératrices du cylindre, jusqu'à la seconde base du cylindre. Le travail compensé effectué aura pour valeur

$$(3) \quad \mathcal{E} = \Omega \theta \int_{T_0}^T \rho dT,$$

$\rho$  étant une quantité qui dépend de la température  $T$  et de l'orientation des plans isothermes.

Cette proposition est le fondement de la théorie que nous allons exposer; son énoncé ne porte plus aucune trace de l'hypothèse sur la constitution des corps cristallisés dont nous sommes partis pour l'établir. Il devait en être ainsi; les équations sur lesquelles repose une théorie ne doivent pas dépendre des images toujours imparfaites que nous nous faisons de la constitution des corps; mais ces représentations peuvent être d'un grand secours dans la découverte de semblables équations. Sans l'introduction des réseaux et en conservant l'hypothèse de la complète homogénéité des solides, il serait impossible de comprendre comment  $\rho$  dépend de l'orientation des plans isothermes.

La direction qui définit l'orientation d'un plan isotherme est déterminée lorsqu'on donne les cosinus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des angles que cette direction fait avec trois axes de coordonnées rectangulaires. Pour une température déterminée,  $\rho$  varie lorsqu'on fait varier les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , qui définissent l'orientation des plans isothermes. On peut donner de cette variation une représentation dont nous ferons par la suite un fréquent usage. Sur la droite qui définit l'orientation du plan isotherme, portons une longueur égale à la valeur correspondante de  $\rho$ , dans le sens de la droite ou en sens contraire, suivant que  $\rho$  est positif ou négatif. L'extrémité  $M$  du rayon vecteur ainsi défini décrit une certaine surface, car ses coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont des fonctions de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Nous donnerons à cette surface le nom de *surface de pyro-électricité*. Nous verrons en effet que l'étude de tous les phénomènes de pyro-électricité se ramène à la considération de cette surface.

Il semble impossible de fixer *a priori* la forme de la relation qui lie  $x, y, z$  à  $\alpha, \beta, \gamma$ . Mais nous pouvons, comme première approximation, admettre que  $x, y, z$  sont des fonctions linéaires de  $\alpha, \beta, \gamma$ ; nous verrons dans la suite que les conséquences que l'on peut déduire de cette hypothèse sont d'accord avec l'expérience.

Admettons donc que l'on ait

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\alpha + b\beta + c\gamma, \\ y &= y_0 + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \\ z &= z_0 + a''\alpha + b''\beta + c''\gamma, \end{aligned}$$

les quantités

$$\begin{aligned} x_0, \quad a, \quad b, \quad c, \\ y_0, \quad a', \quad b', \quad c', \\ z_0, \quad a'', \quad b'', \quad c'' \end{aligned}$$

étant indépendantes de l'orientation des plans isothermes.

Posons

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= b'c'' - c'b'', & \mathfrak{B} &= c'a'' - a'c'', & \mathfrak{C} &= a'b'' - b'a'', \\ \mathfrak{A}' &= b''c - c''b, & \mathfrak{B}' &= c'a - a'c, & \mathfrak{C}' &= a''b - b''a, \\ \mathfrak{A}'' &= bc' - cb', & \mathfrak{B}'' &= ca' - ac', & \mathfrak{C}'' &= ab' - ba'. \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\alpha = \frac{1}{D} [\mathfrak{A}(x - x_0) + \mathfrak{A}'(y - y_0) + \mathfrak{A}''(z - z_0)],$$

$$\beta = \frac{1}{D} [\mathfrak{B}(x - x_0) + \mathfrak{B}'(y - y_0) + \mathfrak{B}''(z - z_0)],$$

$$\gamma = \frac{1}{D} [\mathfrak{C}(x - x_0) + \mathfrak{C}'(y - y_0) + \mathfrak{C}''(z - z_0)].$$

Mais, d'autre part, puisque les axes sont rectangulaires,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$



On a donc

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{A}(x-x_0) + \mathfrak{A}'(y-y_0) + \mathfrak{A}''(z-z_0)]^2, \\ & + [\mathfrak{B}(x-x_0) + \mathfrak{B}'(y-y_0) + \mathfrak{B}''(z-z_0)]^2, \\ & + [\mathfrak{C}(x-x_0) + \mathfrak{C}'(y-y_0) + \mathfrak{C}''(z-z_0)]^2 - D^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation nous apprend que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, la surface de pyro-électricité est un ellipsoïde qui a pour centre le point de coordonnées

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Parmi les résultats auxquels nous serons conduits, il en est qui sont indépendants de l'hypothèse en vertu de laquelle la surface de pyro-électricité a la forme d'un ellipsoïde; d'autres sont intimement liés à cette hypothèse. Il sera toujours facile de distinguer entre ces deux ordres de résultats.

#### IV. — Relation entre la force électromotrice et la surface de pyro-électricité.

Considérons une lame cristalline de surface indéfiniment étendue. Supposons que cette lame ne présente pas la même température en tous ses points; les surfaces isothermes sont des plans parallèles aux faces de la lame. Nous supposerons, pour fixer les idées, que la lame soit soumise à un refroidissement. Il y a alors à l'intérieur de la lame une surface isotherme plus chaude que toutes les autres dont nous désignerons la température par  $T_1$ . A partir de ce plan, la température va en décroissant jusqu'aux deux faces de la lame où elle prend la valeur  $T_0$ .

Nous imaginerons chacune des deux faces de la lame recouverte par une lame très mince de métal, à la température  $T_0$ , dont nous supposerons, pour simplifier, la structure absolument homogène.

Considérons d'abord une de ces lames métalliques. La température étant la même en tous les points de cette lame,  $\epsilon V + \Theta$  doit avoir la même valeur en tous les points de cette lame. Le métal étant supposé absolument homogène,  $\Theta$  a aussi la même valeur en tous les points de la feuille métallique. Le niveau potentiel  $V$  a donc la même valeur en

tous les points de cette lame. On peut ajouter que la quantité  $H$  a aussi la même valeur en tous les points de cette lame.

Les quantités  $\Theta$ ,  $V$ ,  $H$  ont aussi la même valeur en tous les points de seconde feuille métallique. Les quantités  $\Theta$  et  $H$  ont la même valeur en un point quelconque de la seconde feuille qu'en un point quelconque de la première. Au contraire, la fonction potentielle  $V$  peut n'avoir pas la même valeur en un point de la première et en un point de la seconde. C'est par cette différence entre les valeurs de  $V$  que se manifestent les phénomènes pyro-électriques.

Considérons un point  $M$  pris sur l'une des deux feuilles métalliques, la feuille de gauche par exemple, et un point  $M'$  pris sur l'autre feuille. Soient  $V$ ,  $\Theta$ ,  $H$  les valeurs au point  $M$  de la fonction potentielle et de deux autres quantités dont la signification nous est connue. Soient  $V'$ ,  $\Theta'$ ,  $H'$  les valeurs des mêmes quantités au point  $M'$ . Supposons qu'une charge  $dq$  passe du point  $M$  au point  $M'$ . Pendant qu'elle décrit un élément de chemin dans une région de la lame cristalline dont la température est  $T$ , l'entropie varie de  $dS$ . On a alors [1<sup>re</sup> Partie, § I, égalité (4)] (1)

$$[(\varepsilon V + \Theta + H) - (\varepsilon V' + \Theta' + H')] dq = - E \int_M^{M'} T dS.$$

Le second membre est le travail compensé produit. Si nous le désignons par  $d\mathcal{E}$ , et si nous remarquons, en outre, que  $\Theta = \Theta'$  et que  $H = H'$ , nous aurons

$$(1) \quad \varepsilon(V - V') dq = d\mathcal{E}.$$

Tandis que la charge  $dq$  traverse l'une ou l'autre des deux feuilles métalliques, elle n'effectue aucun travail compensé; au moment où elle passe de la première feuille métallique à la lame cristalline, elle effectue un certain travail compensé; mais elle effectue un travail compensé égal et de signe contraire en passant de la lame cristalline à la seconde feuille métallique. La quantité  $d\mathcal{E}$  se réduit donc au travail compensé produit en traversant la lame cristalline.

Traçons sur la première feuille métallique une surface d'aire  $\Omega$ ; sur

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 408.

cette surface, distribuons une charge électrique avec une densité uniforme 0. Par un mouvement de translation, faisons passer toutes les particules ainsi distribuées sur la première feuille métallique à la surface de la seconde feuille métallique. Pour chaque particule électrique, nous pourrions écrire une égalité semblable à l'égalité (4). En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, dans lesquelles V et V' ont des valeurs constantes, nous trouverons

$$(5) \quad \varepsilon(V - V')\Omega\theta = \bar{\varepsilon},$$

$\bar{\varepsilon}$  étant le travail compensé produit par le transport des particules électriques au travers de la lame cristalline. La formule (2) va nous donner le moyen d'évaluer ce travail.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse d'une lame cristalline qui se refroidit; la température est plus élevée à l'intérieur de la lame qu'à sa surface. A l'intérieur de la lame se trouve une température T, plus chaude que toutes les autres, et, en particulier, plus élevée que la température T<sub>0</sub> des faces de la lame.

Le travail compensé  $\bar{\varepsilon}$  peut être partagé en deux : en premier lieu, le travail compensé  $\bar{\varepsilon}_1$  effectué par la charge  $\Omega\theta$  lorsqu'elle passe de la première face de la lame jusqu'à l'isotherme dont la température est T<sub>1</sub>; en second lieu, le travail compensé  $\bar{\varepsilon}_2$  effectué par la même charge lorsqu'elle passe de cet isotherme jusqu'à la seconde face de la lame.

Dans la première partie du trajet, les plans isothermes ont une orientation bien déterminée; la quantité  $\rho$  est donc une simple fonction de la température, ce que nous mettrons en évidence en l'écrivant  $\rho(T)$ . De plus, la charge électrique marche dans le sens où les températures vont en croissant, en sorte que le travail compensé produit a pour valeur, d'après l'égalité (3),

$$\bar{\varepsilon}_1 = \Omega\theta \int_{T_0}^{T_1} \rho(T) dT.$$

Durant la seconde partie du trajet, l'orientation des plans isothermes est encore invariable; mais elle est inverse de l'orientation que les plans isothermes présentent durant la première partie du trajet. La quantité  $\rho$  est donc encore une fonction de la température seule, mais

une fonction d'une autre forme que  $\rho(T)$ ; nous la désignerons par  $\rho'(T)$ . De plus, la charge électrique marche dans le sens où les températures vont en décroissant. Le travail compensé produit a donc pour valeur

$$\mathfrak{E}_2 = -\Omega\theta \int_{T_1}^{T_2} \rho'(T) dT.$$

On a donc, en résumé,

$$(6) \quad \mathfrak{E} = \Omega\theta \int_{T_1}^{T_2} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

Dans cette formule,  $\rho(T)$  est, d'après ce qui précède, la valeur de  $\rho$  à la température  $T$  pour une orientation des plans isothermes définie par une normale aux faces de la lame menée de la gauche vers la droite;  $\rho_1(T)$  est la valeur de  $\rho$ , à la température  $T$ , pour l'orientation inverse.

Supposons, en second lieu, la lame cristalline soumise à un échauffement; la température  $T_1$  est alors une température minima; elle est inférieure à la température  $T_0$ . Divisons en deux parties, comme dans le cas précédent, le trajet des charges électriques.

Durant la première partie du trajet, les plans isothermes ont une orientation invariable, identique avec celle qu'ils présentent durant la seconde partie du trajet dans le cas précédent; de plus, la charge électrique marche dans le sens où les températures décroissent; le travail compensé produit durant la première partie du trajet a donc pour valeur

$$\mathfrak{E}_1 = \Omega\theta \int_{T_1}^{T_0} \rho'(T) dT.$$

Durant la seconde partie du trajet, on trouve de même que le travail compensé produit a pour valeur

$$\mathfrak{E}_2 = -\Omega\theta \int_{T_1}^{T_0} \rho(T) dT.$$

Le travail compensé produit a donc en somme pour valeur

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = -\Omega\theta \int_{T_1}^{T_0} [\rho(T) - \rho'(T)] dT = \Omega\theta \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

On retrouve ainsi l'égalité (6). Cette égalité est donc générale et donne la valeur de  $\varepsilon$ , que  $T$ , soit supérieur ou inférieur à  $T_0$ .

Si nous reportons cette valeur de  $\varepsilon$  dans l'égalité (5), nous trouvons

$$(7) \quad \varepsilon(V - V') = \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$(8) \quad \varepsilon = \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

Telles sont les égalités qui déterminent la différence de niveau potentiel entre les deux faces de la lame et la force électromotrice du circuit obtenu en réunissant ces deux faces par un fil métallique, en fonction des rayons vecteurs  $\rho(T)$  et  $\rho'(T)$  de la surface de pyro-électricité.

#### V. — Cristaux qui peuvent présenter des phénomènes pyro-électriques.

Pour qu'une lame cristalline manifeste des phénomènes pyro-électriques, il faut et il suffit que la quantité

$$\int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT$$

ne soit pas égale à zéro. Pour cela, il faut que

$$\rho(T) - \rho'(T)$$

ne soit pas identiquement nul, et cette condition est en même temps suffisante; car, si  $\rho(T) - \rho'(T)$  n'est pas identiquement nul, on pourra trouver deux températures  $T_0$  et  $T_1$ , assez voisines pour que cette différence garde un signe constant lorsque  $T$  varie entre  $T_0$  et  $T_1$ . Alors l'intégrale précédente sera certainement différente de zéro.

Traçons la surface de pyro-électricité relative à la température  $T$ . Par l'origine, menons une sécante perpendiculaire aux faces de la lame cristalline; elle rencontre la surface de pyro-électricité en deux points dont les rayons vecteurs sont les valeurs absolues de  $\rho(T)$  et de  $\rho'(T)$ . Pour que la lame cristalline considérée puisse présenter des phéno-

mènes pyro-électriques, il faut et il suffit que ces deux rayons vecteurs ne soient pas égaux entre eux.

Si, pour une substance cristalline déterminée, l'origine des coordonnées n'est pas centre de la surface de pyro-électricité, on pourra mener par l'origine des coordonnées une infinité de droites telles que la corde interceptée par la surface sur chacune de ces droites n'ait pas son milieu à l'origine; on pourra donc d'une infinité de manières tailler dans cette substance des lames cristallines à faces parallèles qui présenteront des phénomènes pyro-électriques. Par conséquent, pour qu'une substance cristalline puisse présenter des phénomènes pyro-électriques, il faut et il suffit que la surface de pyro-électricité n'ait pas pour centre l'origine des coordonnées.

La forme de la surface de pyro-électricité dépend de la structure que présente la substance cristalline à l'intérieur d'une maille du réseau. Si cette structure présente une symétrie droite ou oblique par rapport à un plan passant par le centre de la maille, l'origine des coordonnées coupera en deux parties égales la corde de la surface de pyro-électricité menée par l'origine perpendiculairement à ce plan de symétrie et les lames taillées parallèlement à ce plan de symétrie ne présenteront aucune pyro-électricité. Si l'on admet que la symétrie de la structure interne d'une maille du réseau se révèle par la symétrie de la forme cristalline, on voit que si le cristal présente une symétrie droite ou oblique par rapport à un plan, les lames parallèles à ce plan ne présenteront aucun phénomène pyro-électrique.

Si la forme cristalline admet un centre, la surface de pyro-électricité admettra pour centre l'origine des coordonnées, et une lame, taillée dans la substance d'une manière quelconque, sera dénuée de pyro-électricité. Donc les phénomènes pyro-électriques ne peuvent être observés que sur des cristaux dénués de centre, c'est-à-dire sur des cristaux qui présentent l'hémiédrie à faces inclinées ou la tétartoédrie.

Mais tous les cristaux hémièdres à faces inclinées ou tous les cristaux tétartoèdres ne manifesteront pas la pyro-électricité. Par exemple, les cristaux hémièdres à faces inclinées du système cubique présentent la même symétrie que le tétraèdre régulier; ils offrent quatre axes de symétrie ternaire; l'ellipsoïde de pyro-électricité, qui doit offrir la même symétrie, se réduira alors à une sphère ayant son centre à l'ori-

gine des coordonnées, ce qui est incompatible avec tout phénomène pyro-électrique. Il en est de même dans le cas de la tétartoédrie du chlorate de sodium. Il est également facile de voir que, pour le quartz plagièdre, l'ellipsoïde de pyro-électricité est un ellipsoïde de révolution ayant son centre à l'origine des coordonnées, disposition qui est encore incompatible avec la pyro-électricité.

Si l'on admet que la surface de pyro-électricité soit un ellipsoïde, toutes les fois que la forme cristalline présentera un axe de symétrie, l'ellipsoïde aura un de ses axes dirigé comme cet axe de symétrie et passant à l'origine des coordonnées. Si la forme cristalline présente deux axes de symétrie distincts, deux axes de l'ellipsoïde passeront à l'origine des coordonnées qui sera par conséquent au centre de l'ellipsoïde. On arrive ainsi à la proposition énoncée par M. Mallard :

*Pour qu'un cristal puisse présenter des phénomènes pyro-électriques, il faut qu'il soit dénué de centre et qu'il présente au plus un axe de symétrie.*

Cette règle est d'accord avec les observations de MM. Friedel et J. Curie.

La proposition que nous venons d'établir n'est applicable que dans les conditions où la structure interne de chaque maille du réseau présente la même symétrie que la forme cristalline; si, par des pressions ou des dilatations, on détruit la symétrie que présente la structure de la substance, on pourra, avec certains cristaux qui ne sont pas naturellement pyro-électriques, obtenir une pyro-électricité accidentelle. Nous reviendrons sur ce sujet en étudiant les phénomènes piézo-électriques.

## VI. — Lois fondamentales des phénomènes pyro-électriques.

Revenons aux formules fondamentales

$$(7) \quad \varepsilon(V - V') = \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT,$$

$$(8) \quad \mathcal{C} = \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

Ces formules sont applicables aussi bien au cas où la température  $T$ ,

est supérieure à la température  $T_0$  des deux faces qu'au cas où la température  $T_1$  est inférieure à la température  $T_0$ .

Supposons tout d'abord la lame soumise à un refroidissement. Les deux faces sont à une température  $\Theta$ ; lorsqu'on pénètre à l'intérieur de la lame, les températures vont en croissant de part et d'autre, jusqu'à une valeur maxima  $\Theta'$ ,  $\mathcal{E}$  a alors une valeur  $\mathcal{E}_1$  déterminée par l'égalité

$$\mathcal{E}_1 = \int_{\Theta}^{\Theta'} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

Supposons ensuite la lame soumise à un réchauffement. Les deux faces sont à la température  $\Theta'$ ; lorsqu'on pénètre à l'intérieur, les températures décroissent jusqu'à une valeur minima égale à  $\Theta$ ;  $\mathcal{E}$  a alors une valeur  $\mathcal{E}_2$  déterminée par l'égalité

$$\mathcal{E}_2 = \int_{\Theta'}^{\Theta} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

De ces deux égalités on déduit

$$\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_2.$$

La même lame a donc des forces électromotrices de signe contraire, selon qu'elle s'échauffe ou se refroidit. Cette inversion dans la force électromotrice est évidemment le trait caractéristique des phénomènes pyro-électriques.

Pour pousser plus loin l'analyse des phénomènes pyro-électriques, nous supposerons les deux températures  $T_0$  et  $T_1$  assez peu différentes pour qu'on puisse négliger les variations que subissent  $\rho(T)$  et  $\rho'(T)$  lorsque  $T$  varie entre  $T_0$  et  $T_1$ , et qu'on puisse regarder ces quantités comme deux constantes  $\rho$  et  $\rho'$ . Les égalités (7) et (8) deviendront alors

$$(9) \quad \varepsilon(V - V') = (\rho - \rho')(T_1 - T_0),$$

$$(10) \quad \mathcal{E} = (\rho - \rho')(T_1 - T_0).$$

Nous allons maintenant faire usage de ces formules approchées pour étudier théoriquement les lois du dégagement de l'électricité par un cristal pyro-électrique qui s'échauffe ou se refroidit.

Supposons qu'on réunisse les deux faces de la plaque par un conduc-



teur métallique de même largeur que la plaque, de telle façon que le flux électrique à l'intérieur de la plaque soit normal aux faces de la plaque. Supposons, en outre, que la résistance de ce conducteur soit négligeable. Désignons par  $2a$  l'épaisseur de la plaque cristalline, par  $\Omega$  sa section, par  $r$  sa résistance spécifique dans la direction normale à ces faces. Le courant qui traverse la plaque de la gauche vers la droite aura pour intensité

$$I = \frac{\mathcal{E} \Omega}{2ra}.$$

La quantité d'électricité transportée par ce courant pendant le temps  $dt$  sera

$$dq = I dt,$$

ou bien, en remplaçant  $I$  et  $\mathcal{E}$  par leurs valeurs,

$$(11) \quad dq = \frac{\Omega}{2ra} (\rho - \rho') (T_1 - T_0) dt.$$

Cherchons la relation qui existe entre  $T_1 - T_0$  et le temps  $t$ .

Pour cela, il faut tout d'abord résoudre le problème suivant :

*Quelle est, à l'instant  $t$ , la distribution des températures dans une plaque cristalline assez étendue pour qu'on puisse la regarder comme un mur indéfini, qui est plongée dans un milieu à température constante et qui, à l'instant initial, avait en tous ses points une même température, différente de celle du milieu environnant?*

Nous emprunterons à Lamé la solution de ce problème.

D'après Lamé, la distribution des températures dans la plaque est, à l'instant  $t$ , donnée par la formule (1)

$$V = 2 \sum \frac{\sin ma}{ma + \sin ma \cos ma} e^{-m^2 \frac{t}{K}} \cos mx.$$

Dans cette formule,  $2a$  représente, comme dans nos notations, l'épaisseur de la lame;  $x$  est la distance d'un point au plan équidistant des deux faces de la lame;  $t$  est le temps;  $K$  une constante sur la signification de laquelle nous reviendrons tout à l'heure;  $m$  représente l'un des

---

(1) LAMÉ, *Théorie analytique de la chaleur*, p. 323, équation (56).

termes d'une série de quantités constantes dont la valeur dépend de la conductibilité de la lame et de son pouvoir émissif; le signe  $\Sigma$  s'étend à toutes les valeurs que l'on obtient en remplaçant successivement  $m$  par toutes ces quantités;  $V$  représente la température au point d'abscisse  $x$ , en prenant pour zéro de température la température du milieu et pour unité de température la température initiale de la lame.

Si nous supposons que la température absolue du milieu ait pour valeur  $\Theta_0$ , que la température absolue initiale de la lame ait pour valeur  $\Theta_1$ , et que la température absolue du point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$ , soit  $T$ , nous aurons

$$V = \frac{T - \Theta_0}{\Theta_1 - \Theta_0}$$

et, par conséquent,

$$(12) \quad T = \Theta_0 + 2(\Theta_1 - \Theta_0) \sum \frac{\sin ma}{ma + \sin ma \cos ma} e^{-m^2 \frac{t}{K}} \cos mx.$$

Une remarque est nécessaire au sujet de l'établissement de cette formule.

Lamé a supposé que le mur dont il étudiait le refroidissement était formé par une substance isotrope. Dans ce cas, si l'on désigne par  $\Gamma$  la chaleur spécifique de la substance, par  $\Delta$  son poids spécifique, par  $q$  sa conductibilité, et si l'on pose

$$K = \frac{\Gamma \Delta}{q},$$

la température doit vérifier l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = K \frac{\partial T}{\partial t},$$

les coordonnées étant rectangulaires.

Dans le cas particulier que nous considérons, si l'on place le plan des  $yz$  parallèle aux faces de la lame,  $T$  doit évidemment dépendre de la seule variable  $x$ . L'équation précédente se réduit donc à

$$(13) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = K \frac{dT}{dt}.$$

Si l'on intègre cette équation en tenant compte de l'état initial et des conditions relatives aux faces de la lame, on trouve la formule (12).

Mais, dans le cas actuel, nous appliquons cette formule (12) au cas où la plaque est formée d'une substance qui non seulement n'est pas isotrope, mais qui, de plus, grâce à son hémiedrie, ne possède même pas ce que Lamé nomme l'égalité symétrique. La formule (12) reste-t-elle applicable à ce cas?

Lorsqu'une substance ne présente pas l'égalité symétrique, l'équation différentielle que doit vérifier la température est la suivante (1) :

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\beta_2 + \gamma_1) \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} \\ + (\gamma + \alpha_2) \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} + (\beta + \alpha_1) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \Gamma \Delta \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Le système de coordonnées est un système rectangulaire quelconque. Dans le cas d'une plaque indéfinie dont la température était initialement la même en tous les points, les surfaces isothermes sont évidemment des plans parallèles aux faces de la lame. Si donc on place le plan des  $yz$  parallèlement aux faces de la lame,  $T$  sera une fonction de la seule variable  $x$ ; l'équation précédente deviendra

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\Gamma \Delta}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Si l'on pose

$$(14) \quad K = \frac{\Gamma \Delta}{\alpha},$$

cette équation différentielle deviendra identique à l'équation (13).

L'équation différentielle du problème est donc la même pour une substance cristalline quelconque que pour une substance isotrope; les conditions aux limites et la condition qui exprime l'état initial sont aussi les mêmes. Par conséquent, le résultat (12), obtenu par Lamé pour une substance isotrope, est applicable à une substance cristalline quelconque, qu'elle jouisse ou non de l'égalité symétrique. Dans cette formule (12), on doit donner à  $K$  la valeur (14), valeur qui dépend de l'orientation des faces de la lame.

Lamé regardait « l'électrisation par la chaleur de certains cristaux

(1) LAMÉ, *Théorie analytique de la chaleur*, p. 35, équation (2).

*Ann. de l'Éc. Normale*. 3<sup>e</sup> Série. Tome III. — SEPTEMBRE 1886.

comme due très probablement à l'inégalité des conductibilités angulaires dans deux sens opposés » (1). On voit que cette cause ne saurait expliquer les phénomènes pyro-électriques, puisque, dans le cas que nous étudions actuellement, les cristaux dépourvus d'égalité symétrique se comportent, à l'égard de la chaleur, comme les milieux doués d'égalité symétrique.

La formule (12) donne  $T_0$  lorsqu'on y fait  $x = a$ , et  $T_1$  lorsqu'on y fait  $x = 0$ . On a donc

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0) \sum \frac{\sin ma(1 - \cos ma)}{ma + \sin ma \cos ma} e^{-m^2 \frac{t}{K}}.$$

Si l'on reporte cette valeur de  $T_1 - T_0$  dans l'égalité (11), on trouve

$$dq = \frac{\Omega}{ra}(\rho' - \rho)(\Theta_1 - \Theta_0) \sum \frac{\sin ma(1 - \cos ma)}{ma + \sin ma \cos ma} e^{-m^2 \frac{t}{K}} dt.$$

La quantité d'électricité qui traverse la plaque pendant toute la durée de son refroidissement s'obtient en intégrant l'expression précédente depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = +\infty$ . On a donc, en désignant par  $q$  cette quantité,

$$q = \frac{\Omega}{ra}(\rho' - \rho)(\Theta_1 - \Theta_0) \sum \frac{\sin ma(1 - \cos ma)}{ma + \sin ma \cos ma} \int_0^\infty e^{-m^2 \frac{t}{K}} dt$$

ou bien, en effectuant l'intégration indiquée,

$$(15) \quad q = \frac{K\Omega}{ra}(\rho' - \rho)(\Theta_1 - \Theta_0) \sum \frac{\sin ma(1 - \cos ma)}{ma + \sin ma \cos ma} \frac{1}{m^2}.$$

La série qui figure au second membre de cette égalité ne dépend que de l'épaisseur de la lame, de sa nature, de sa conductibilité et du pouvoir émissif de ses deux faces. Si donc on laisse constants ces divers paramètres, on arrive à la conclusion suivante.

La quantité d'électricité qu'une lame pyro-électrique met en circulation dans un circuit fermé pendant la durée de son refroidissement est proportionnelle au nombre de degrés dont sa température s'est abaissée et indépendante de la valeur absolue de sa température initiale et de

---

(1) LAMÉ, *Théorie analytique de la chaleur*, p. 21.

sa température finale. Cette quantité est en même temps proportionnelle à sa section.

Lorsque la lame pyro-électrique est échauffée au lieu d'être refroidie, le courant marche en sens contraire; mais la quantité d'électricité mise en circulation par une lame pyro-électrique dont la température s'élève d'un nombre déterminé de degrés est égale à la quantité d'électricité mise en circulation en sens contraire par la même lame lorsque sa température s'abaisse du même nombre de degrés.

Il serait difficile, au moyen de l'égalité (15), d'étudier l'influence exercée sur le dégagement électrique par une variation de l'épaisseur de la lame ou du pouvoir émissif de ses faces, car ces deux quantités entrent d'une manière très compliquée dans la série

$$\sum \frac{1}{m^2 a} \frac{\sin ma(1 - \cos ma)}{ma + \sin ma \cos ma}.$$

On peut, au contraire, étudier l'influence qu'exercent les variations de ces paramètres si l'on remplace la formule (15) par une formule approchée convenant seulement au cas où le refroidissement est très lent.

L'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = K \frac{\partial T}{\partial t},$$

à laquelle doit satisfaire la température, devient, dans ce cas,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

et montre que  $T$  est une fonction linéaire de  $x$ .

On a, d'ailleurs, pour  $x = 0$ ,

$$T = T_1,$$

et pour  $x = \pm a$ ,

$$T = T_0.$$

Par conséquent, pour les valeurs positives de  $x$ , on a

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{a} x,$$

et pour les valeurs négatives de  $x$ , on a

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{a} x.$$

La quantité de chaleur qui arrive à l'une quelconque des deux faces de la lame pendant le temps  $dt$  a pour valeur

$$\frac{\Omega \alpha}{a} (T_1 - T_0) dt.$$

C'est la quantité de chaleur que cette face rayonne pendant le même temps dans l'espace environnant. Si donc on désigne par  $dQ$  la quantité de chaleur rayonnée par la plaque pendant le temps  $dt$ , on aura

$$(16) \quad dQ = \frac{2\Omega \alpha}{a} (T_1 - T_0) dt.$$

La quantité d'électricité mise en circulation pendant le même temps a pour valeur

$$(11) \quad dq = \frac{\Omega}{2ra} (\rho' - \rho) (T_1 - T_0) dt.$$

De ces deux formules on déduit

$$(17) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{4ra} (\rho' - \rho) \frac{dQ}{dt}.$$

Le coefficient de  $\frac{dQ}{dt}$  est indépendant du pouvoir émissif des deux faces de la lame, de son épaisseur, de sa section. La vitesse du dégagement électrique est donc à la vitesse du dégagement calorifique dans un rapport qui dépend uniquement de la nature de la lame. Deux lames du même cristal, orientées de la même manière, qui perdent des quantités de chaleur égales, mettent en mouvement des quantités d'électricité égales. Cette loi est seulement une loi approchée; elle est d'autant plus exacte que le refroidissement est plus lent.

Tous ces résultats sont conformes aux expériences de Gaugain. Toutefois, on ne peut les regarder comme formant l'explication théorique de ces expériences. Gaugain employait non pas des plaques indéfinies

soumises au rayonnement par leurs deux faces, mais des prismes de tourmaline soumis au rayonnement par toute leur surface. Les conditions de ses expériences sont donc beaucoup plus complexes que les conditions que nous avons supposées réalisées.

#### VII. — Phénomènes piézo-électriques.

L'ellipsoïde de pyro-électricité forme avec l'origine des coordonnées une figure qui doit avoir même symétrie que la structure interne de la maille du réseau. Ce principe permet, comme nous l'avons vu, de déterminer quelles sont les substances cristallines susceptibles de manifester la pyro-électricité; mais un échauffement inégal, une compression suivant une certaine direction peuvent, en déformant le cristal et en altérant en même temps la symétrie de la structure, donner accidentellement à une substance la pyro-électricité qu'elle ne possède pas naturellement. C'est à des causes de ce genre qu'il faut rapporter, comme l'ont montré les recherches de MM. Friedel et J. Curie, les phénomènes de pyro-électricité anormale observés par M. Hankel. La plupart des expériences dans lesquelles se manifeste la pyro-électricité accidentelle sont fort difficiles à soumettre à une analyse exacte; la théorie que nous avons exposée jusqu'ici suppose, en effet, que les surfaces isothermes sont des plans parallèles, et nous verrons plus loin combien il serait difficile de s'affranchir de cette restriction; or, la plupart du temps, dans les expériences de pyro-électricité accidentelle, les surfaces isothermes diffèrent beaucoup de la forme plane. Nous ne pourrions donc étudier ces expériences.

La distinction entre la pyro-électricité naturelle et la pyro-électricité accidentelle joue un rôle important dans l'étude des phénomènes de piézo-électricité.

Les premières expériences de piézo-électricité instituées par MM. P. et J. Curie ont porté sur un cristal possédant la pyro-électricité naturelle, la tourmaline.

Prenons une lame à faces parallèles taillée normalement à l'axe de pyro-électricité, et comprimons-la; la lame prend une force électromotrice déterminée. Ce fait suppose que ses divers points ne sont pas à



la même température, ainsi qu'il résulte des propositions exposées au § II. Il est facile de trouver l'origine de ces différences de température.

On sait, en effet, que la compression d'une lame produit de la chaleur ou en détruit selon que cette lame se dilate ou se contracte par une élévation de température. La théorie de ce phénomène a été déduite du principe de Carnot par Sir W. Thomson et est reproduite aujourd'hui dans tous les Traités de Physique. Si nous désignons par  $\beta$  le coefficient de dilatation de la substance dans une direction normale aux faces de la lame, par  $T$  la température absolue, par  $2a$  l'épaisseur de la lame, par  $\Omega$  sa surface, par  $A$  l'équivalent calorifique du travail, la quantité de chaleur  $\delta Q$  produite lorsqu'on augmente d'une petite quantité  $\delta P$  la pression supportée par cette lame a pour valeur, d'après la formule de Sir W. Thomson,

$$(18) \quad \delta Q = 2AT\alpha\Omega\beta\delta P.$$

Si la lame se dilate par l'effet de la chaleur, sa température s'élève pendant la compression; à la suite de cette compression, elle se comporte comme une lame pyro-électrique soumise au refroidissement; si, au contraire, elle se contracte par l'effet de la chaleur, la compression abaissera sa température, et, après la compression, elle se comportera comme une lame pyro-électrique qui s'échauffe.

Si l'on fait cesser la compression exercée sur la lame, après l'avoir ramenée à l'état neutre, la température de la lame s'abaissera si la lame se dilate par l'effet d'un échauffement; la température de la lame s'élèvera si la lame se contracte par l'effet d'un échauffement. Donc, après la détente, une lame qui se dilate par l'effet d'une élévation de température se comportera comme une lame pyro-électrique soumise à un échauffement; une lame qui se contracte par l'effet de la chaleur se comportera comme une lame pyro-électrique soumise à un refroidissement.

Les phénomènes présentés par les lames qui se dilatent par l'action de la chaleur ont été constatés sur la tourmaline et la calamine par MM. P. et J. Curie. Ces physiciens ont d'ailleurs prévu le renversement que ce phénomène présenterait dans les cristaux qui se contractent par l'effet de la chaleur; les substances pyro-électriques étudiées jusqu'ici



se dilatent par l'effet de la chaleur dans la direction de l'axe de pyro-électricité, en sorte que ce renversement n'a pas encore été constaté par l'expérience.

D'après l'explication qui vient d'être proposée des faits observés par MM. P. et J. Curie, les phénomènes piézo-électriques présentés par la tourmaline ne sont que des phénomènes pyro-électriques normaux, dans lesquels l'échauffement est produit par une compression. S'il en est ainsi, comme la compression a simplement pour but de produire de la chaleur, comme d'ailleurs la tourmaline se dilate dans tous les sens par suite d'une élévation de température, et par conséquent s'échauffe par le fait d'une compression suivant une direction quelconque, le sens des phénomènes ne doit pas changer lorsqu'au lieu de soumettre la tourmaline à l'action d'une pression parallèle à l'axe de pyro-électricité, on la soumet à l'action de pressions normales à cet axe. Cette conclusion est conforme aux expériences de MM. P. et J. Curie.

Les phénomènes de piézo-électricité que présente le quartz sont beaucoup plus complexes. Dans l'explication de ces phénomènes, on doit encore, il est vrai, regarder la compression comme une cause d'échauffement; mais le quartz, même frappé d'hémiédrie plagièdre, n'est pas naturellement pyro-électrique. Si l'on tient compte de la symétrie du cristal, on voit aisément que l'ellipsoïde de pyro-électricité est un ellipsoïde de révolution ayant pour centre l'origine des coordonnées et pour axe l'axe du quartz; un échauffement produit par compression ne saurait donc donner lieu à un phénomène pyro-électrique, si la compression n'altérait la symétrie de structure du cristal.

Considérons tout d'abord une lame à faces parallèles taillée normalement à l'axe du quartz. Il est évident que, si nous comprimons les deux faces de cette lame, nous pourrions bien modifier la forme de l'ellipsoïde de pyro-électricité, mais nous n'altérerons pas la symétrie de la structure du cristal; l'ellipsoïde de pyro-électricité restera un ellipsoïde de révolution ayant son centre à l'origine des coordonnées: nous ne constaterons, par conséquent, aucun phénomène pyro-électrique. Il en serait évidemment de même si, après avoir taillé dans un cristal de quartz une lame rectangulaire parallèle à l'axe et terminée latéralement par deux faces parallèles à l'axe et par deux faces perpendiculaires, nous soumettions ces deux faces à une compression régulière; mais, si



une compression exercée suivant l'axe du quartz ne peut donner lieu à aucun phénomène pyro-électrique, il n'en est plus de même d'une compression perpendiculaire à cet axe.

Considérons un quartz à l'état naturel. Par l'origine des coordonnées, menons un plan perpendiculaire à l'axe du quartz; l'équivalence des trois axes d'hémiédrie du quartz nous oblige à supposer que la section déterminée dans l'ellipsoïde de pyro-électricité par ce plan a la forme d'un cercle ayant pour centre l'origine des coordonnées. Mais supposons qu'on soumette le quartz à une pression parallèle à l'un des axes d'hémiédrie, les trois axes d'hémiédrie cesseront d'être équivalents; la section de l'ellipsoïde de pyro-électricité par le plan considéré ne sera plus nécessairement un cercle; cette section pourra être une ellipse dont le centre pourra ne pas être l'origine des coordonnées; cette ellipse sera assujettie seulement à cette condition que le diamètre qui passe par l'origine des coordonnées soit parallèle à l'axe d'hémiédrie suivant lequel s'exerce la compression; d'ailleurs, le plan considéré restera un plan de symétrie pour l'ellipsoïde.

Si la déformation dont il s'agit a été produite au moyen d'une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe d'hémiédrie suivant lequel s'exerce la compression, cette lame présentera des phénomènes pyro-électriques; au contraire, une lame parallèle à l'axe d'hémiédrie en question ne présentera pas ces phénomènes.

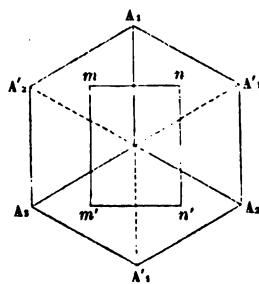
Prenons une lame taillée perpendiculairement à un axe d'hémiédrie et supposons qu'au lieu de la comprimer suivant cet axe d'hémiédrie nous la comprimons dans les directions perpendiculaires; nous observerons des phénomènes pyro-électriques inverses de ceux que produit une compression exercée suivant l'axe d'hémiédrie. En effet, les deux compressions agissent de même au point de vue calorifique; mais les déformations qu'elles imposent à l'ellipsoïde de pyro-électricité sont inverses l'une de l'autre; pour le démontrer, il suffit de remarquer que si l'on applique simultanément à la lame les deux compressions, la symétrie de la structure et par conséquent la symétrie de l'ellipsoïde de pyro-électricité ne seront pas modifiées.

Ces considérations expliquent, au moins d'une manière générale, les phénomènes suivants observés par MM. P. et J. Curie.

Considérons (*fig. 3*) la section hexagonale d'un quartz plagièdre par

un plan perpendiculaire à l'axe ternaire. Soient  $A_1, A_2, A_3$  (fig. 3) les sommets qui ne portent pas les faces plagiédres  $s$ . On taille dans ce cristal un prisme droit ayant pour base  $mn m' n'$ . Lorsque l'on comprime ce prisme normalement à cette base, aucune électricité ne se manifeste en aucun point de sa surface. Lorsqu'on exerce la pression sur les faces latérales  $mn, m' n'$ , perpendiculaires à l'axe binaire, on observe un dégagement d'électricité positive sur  $mn$ , négative sur  $m' n'$ . Enfin, lorsque l'on comprime le prisme suivant une direction normale aux faces  $mm', nn'$ , on n'observe aucun dégagement sur les faces comprimées; mais on constate que la face  $mn$  dégage de l'électricité négative, et la face  $m' n'$  de l'électricité positive.

Fig. 3.



M. Rontgen a fait, sur la piézo-électricité du quartz, des expériences trop complexes pour que nous puissions tenter d'en donner une explication théorique.

Nous avons indiqué au § I que MM. Curie, M. Rontgen et M. Kundt avaient vérifié, conformément aux prévisions de M. Lippmann, que l'électrisation d'un cristal pouvait faire varier ses dimensions. Ces expériences de vérification ont toutes porté sur le quartz; le quartz n'étant qu'accidentellement pyro-électrique, ces expériences sont plus complexes que celles qui porteraient sur un cristal doué de pyro-électricité naturelle, une tourmaline par exemple.

Considérons une lame de tourmaline, taillée normalement à l'axe de pyro-électricité et dont les faces sont recouvertes par des feuilles d'étain. Supposons que l'on maintienne ces feuilles d'étain à des niveaux potentiels constants,  $V$  et  $V'$ . La condition d'équilibre, donnée

par l'égalité (7), est

$$\varepsilon(V - V') = \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

Supposons tout d'abord que la lame de tourmaline ait la même température en tous ses points, l'équilibre ne sera possible que si  $V = V'$ ; si  $V$  n'est pas égal à  $V'$  et si l'on suppose les deux lames maintenues à des niveaux potentiels constants, l'équilibre n'aura pas lieu; il y aura entre les deux lames métalliques un échange d'électricité, un courant qui donnera lieu à des phénomènes thermiques; la lame cristalline, soumise en même temps au rayonnement dans l'espace environnant, finira par prendre en ses différents points des températures différentes et l'équilibre s'établira lorsque ces températures seront telles que l'équation (7) soit vérifiée.

Supposons, pour fixer les idées, la lame cristalline placée de front, comme nous l'avons supposé au § III, et admettons que  $\rho(T) - \rho'(T)$  soit positif. Le second membre a alors le signe de  $T_1 - T_0$ . Chargeons la face de gauche d'électricité positive et la face de droite d'électricité négative;  $V - V'$  sera alors positif; donc, dans l'état d'équilibre, la température  $T$ , à l'intérieur de la plaque sera supérieure à la température  $T_0$  des faces de cette plaque. Cette distribution des températures indique évidemment que la plaque rayonne de la chaleur vers le milieu environnant et, par conséquent, qu'elle est plus chaude que le milieu environnant.

Deux cas sont alors à distinguer. Si la substance dont la plaque est formée se dilate dans le sens de l'axe d'hémiédrie par l'effet de la chaleur, l'épaisseur de la plaque a augmenté par l'effet de l'électrisation; si, au contraire, cette substance se contracte par l'effet de la chaleur, l'épaisseur de la plaque a diminué par le fait de l'électrisation.

Mais, d'autre part, si la substance se dilate par l'action de la chaleur, pour lui communiquer l'électrisation en question, c'est-à-dire une électrisation de même sens que celle d'une plaque qui se refroidit, il eût fallu la comprimer; au contraire, si la substance se contracte par l'action de la chaleur, pour l'électriser de la sorte, il eût fallu la soumettre à une détente.

Donc, si l'on communique à une plaque pyro-électrique l'électrisa-

tion qu'elle prendrait par une compression, l'épaisseur de la plaque augmente, et inversement. On retrouve de la sorte la réciprocité signalée par M. Lippmann.

On peut se demander si cet état d'équilibre, qui exige que les divers points de la plaque de tourmaline soient à des températures différentes, est bien un état d'équilibre stable. On peut aisément se rendre compte du mécanisme qui assure cette stabilité.

Supposons encore, pour fixer les idées, que  $V - V'$  soit positif, ainsi que  $\rho - \rho'$ ; au moment de l'équilibre,  $T_1$  est alors supérieur à  $T_0$ ; les parties intérieures de la lame sont plus chaudes que ses faces, la lame rayonne vers le milieu environnant : il s'agit de montrer que si les niveaux potentiels  $V$  et  $V'$  sont maintenus constants, les températures des diverses parties de la lame demeureront constantes.

Supposons, en effet, que la lame cède une très petite quantité de chaleur au milieu environnant;  $T_1 - T_0$  diminuera d'une petite quantité; il en sera de même de

$$\int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

Si  $V$  et  $V'$  sont maintenus constants, on aura alors

$$\varepsilon(V - V') > \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

L'équilibre sera rompu; un courant infiniment faible s'établira *de la face de gauche à la face de droite*. Le travail non compensé produit par ce courant est proportionnel au carré de son intensité; c'est un infiniment petit du second ordre dont nous pouvons ne pas tenir compte. Si nous désignons par  $dq$  la quantité d'électricité transportée par le courant, le travail compensé produit par ce courant aura pour valeur

$$dq \int_{T_0}^{T_1} [\rho(T) - \rho'(T)] dT.$$

Ce travail sera positif. Le phénomène engendrera donc de la chaleur qui compensera celle qui a été perdue par la lame et assurera la stabilité de l'équilibre.

## VIII. — Cas où les surfaces isothermes ne sont pas planes.

Dans tout ce qui précède, nous avons restreint notre analyse au cas où les surfaces isothermes sont des plans parallèles; cette condition est loin d'être réalisée dans un grand nombre d'expériences de pyro-électricité; il semble donc désirable d'étendre la théorie précédente au cas où les surfaces isothermes ont des formes quelconques; nous allons voir que cette extension soulève de grandes difficultés.

Reprenons le cas où les surfaces isothermes sont des plans parallèles. Le mouvement de l'électricité au travers d'un canal de forme quelconque, découpant sur tous ces plans des surfaces égales, donne lieu à un travail compensé  $\mathfrak{e}$  que nous avons calculé; si l'on désigne par  $q$  la charge électrique qui a été mise en mouvement, ce travail a pour valeur, d'après l'égalité (3),

$$\mathfrak{e} = q \int \rho \, dT,$$

le signe  $\int$  désignant une intégrale curviligne étendue à la trajectoire d'une particule électrique.

Cette intégrale peut s'écrire sous une forme plus explicite.

Si nous désignons par  $dx, dy, dz$  les projections sur les axes de coordonnées de l'élément de chemin décrit par l'une des particules qui composent la charge électrique, nous pourrions écrire

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz.$$

D'autre part,  $\rho$  dépend de la température  $T$  et des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$ , qui déterminent l'orientation des surfaces isothermes; on peut donc écrire

$$\rho = f(T, \alpha, \beta, \gamma).$$

La présence des variables  $\alpha, \beta, \gamma$ , dans l'expression de  $\rho$ , est fondamentale; elle permet seule d'expliquer les phénomènes pyro-électriques; c'est en masquant l'influence de ces variables que l'hypothèse de l'homogénéité des solides rend impossible l'explication de la pyro-électricité.

Moyennant ces expressions de  $\rho$  et de  $dT$ , on a

$$(19) \quad \bar{\epsilon} = q \int f(T, \alpha, \beta, \gamma) \left( \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \right),$$

le signe  $\int$  désignant une intégrale curviligne étendue au chemin suivi par une des particules.

Il semble possible d'étendre cette expression au cas où les surfaces isothermes auraient des formes quelconques;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  indiqueraient l'orientation du plan tangent au point  $x$ ,  $y$ ,  $z$  à la surface isotherme qui passe par ce point. Une semblable généralisation est-elle permise? Il est aisé de voir qu'il n'en est rien.

En effet, en vertu du principe de Carnot, si nous désignons par  $d\bar{\epsilon}$  le travail compensé effectué pendant que la charge électrique  $q$  subit un déplacement élémentaire, l'intégrale

$$\int \frac{d\bar{\epsilon}}{T},$$

étendue à une ligne fermée parcourue par la charge  $q$ , doit être égale à 0. Cela exige que, dans toute région où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  varient d'une manière continue lorsqu'on passe d'un point  $x$ ,  $y$ ,  $z$  à un autre point voisin,  $\frac{d\bar{\epsilon}}{T}$  ou bien  $\frac{f(T, \alpha, \beta, \gamma) dT}{T}$  soit la différentielle totale d'une fonction ayant une valeur parfaitement déterminée en chaque point du solide, pour la distribution des températures qui existe dans ce corps à l'instant que l'on considère.

Cette condition est réalisée dans le cas où les surfaces isothermes sont des plans parallèles; dans ce cas, en effet, dans toute région où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont continus, ils ont des valeurs constantes; la fonction  $f$  dépend alors uniquement de la variable  $T$ , et la quantité  $\frac{f(T) dT}{T}$  est certainement une différentielle totale d'une fonction de la température.

Mais, si  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont des quantités variables d'une manière continue,  $\frac{f(\alpha, \beta, \gamma, T) dT}{T}$  ne peut devenir une différentielle totale que si la fonction  $f$  ne dépend pas de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Comme cette condition ne peut pas

être réalisée en général, l'égalité (19) ne peut être étendue en général au cas où les surfaces isothermes ne sont pas planes.

Toutefois, dans le cas particulier où le corps est isotrope, sa fonction  $f$  doit être indépendante de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . On peut alors, quelle que soit la forme des surfaces isothermes, écrire

$$\bar{\epsilon} = \eta \int_{T_0}^{T_1} f(T) dT.$$

Or c'est précisément l'expression que, dans la 1<sup>re</sup> Partie, nous avons trouvée en supposant le corps homogène. Cette remarque montre que, *pour les corps isotropes*, on arrive au même résultat en prenant pour point de départ l'hypothèse de l'homogénéité absolue de la matière ou l'hypothèse de la constitution réticulaire.





---

SUR LA

# THÉORIE DES RAYONS LUMINEUX,

PAR G. KIRCHHOFF <sup>(1)</sup>.

(Traduit par P. DUHEM.)

---

Les raisonnements par lesquels on cherche à expliquer la formation des rayons lumineux, leur réflexion, leur réfraction, ainsi que les phénomènes de diffraction, reposent surtout sur les considérations qui ont été développées par Huygens et par Fresnel. Sous bien des rapports, la rigueur de ces raisonnements laisse à désirer. Il semble que l'état actuel de nos connaissances ne permette pas encore de déduire des hypothèses qui constituent la théorie des ondulations une théorie de ces phénomènes qui soit à l'abri de tout reproche. Toutefois, on peut donner aux raisonnements dont il s'agit une plus grande précision. Je me permettrai de communiquer à l'Académie quelques déductions relatives à cet objet. Pendant une série de plusieurs années, j'ai exposé dans mes leçons à l'Université la partie fondamentale de ces déductions. Quelques Mémoires, publiés par M. Fröhlich <sup>(2)</sup> et par M. Voigt <sup>(3)</sup>, sont destinés au même but.

1. Nous supposerons que la lumière consiste en vibrations transversales de l'éther. Nous supposerons en outre que, dans le milieu où l'on étudie le mouvement lumineux, l'éther se comporte comme un corps

---

<sup>(1)</sup> Ce Mémoire de M. G. Kirchhoff a paru aux *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, t. II, p. 641; 1882.

<sup>(2)</sup> *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*; Band III, p. 376; Band VI, p. 414; Band XV, p. 592.

<sup>(3)</sup> *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*; Band III, p. 532.

solide, élastique, isotrope et homogène, dont les particules sont soumises uniquement à l'action des forces qui résultent de leurs déplacements relatifs.

D'après ces hypothèses, si l'on désigne par  $u, v, w$  les composantes parallèles aux trois axes coordonnés du déplacement d'une particule étherée, si l'on désigne par  $x, y, z$  les coordonnées de la position d'équilibre de cette particule à l'instant  $t$ , les quantités  $u, v, w$  vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta \varphi.$$

Dans cette équation,  $\Delta \varphi$  représente la somme des trois dérivées partielles du second ordre obtenues en prenant deux fois la dérivée de la quantité  $\varphi$ , soit par rapport à  $x$ , soit par rapport à  $y$ , soit par rapport à  $z$ . La lettre  $\alpha$  représente la vitesse de propagation de la lumière. Toutefois on ne doit pas prendre pour  $u, v, w$  trois solutions quelconques de cette équation (1), il faut encore que ces solutions vérifient l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Soient  $U, V, W$  trois solutions quelconques de cette dernière équation. Les quantités  $u, v, w$ , définies par les égalités

$$(2) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \end{cases}$$

représentent un mouvement lumineux possible. Inversement, à tout mouvement lumineux correspondent trois fonctions  $U, V, W$ , qui vérifient ces équations (1).

Dans la suite, nous représenterons par la lettre  $\varphi$  l'une quelconque des six quantités  $U, V, W, u, v, w$ . Si nous désignons par  $T$  la durée de

---

(1) CLEBSCH, *Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Band LXI.

vibration de la lumière supposée homogène, chacune de ces six quantités sera une fonction linéaire et homogène des quantités.

$$\cos 2\pi \frac{\ell}{T}, \quad \sin 2\pi \frac{\ell}{T}.$$

Nous prendrons pour mesure de l'intensité lumineuse, au point de coordonnées  $x, y, z$ , la moyenne arithmétique des valeurs que prend la quantité

$$u^2 + v^2 + w^2$$

pendant le temps  $T$ . Si nous posons

$$u = U \cos 2\pi \frac{\ell}{T} + U' \sin 2\pi \frac{\ell}{T},$$

$$v = V \cos 2\pi \frac{\ell}{T} + V' \sin 2\pi \frac{\ell}{T},$$

$$w = W \cos 2\pi \frac{\ell}{T} + W' \sin 2\pi \frac{\ell}{T},$$

cette intensité aura pour valeur

$$\frac{1}{2}(U^2 + U'^2 + V^2 + V'^2 + W^2 + W'^2).$$

Supposons que l'espace indéfini soit rempli par le milieu considéré. Supposons que, dans ce milieu, se trouve une source de lumière en un certain point 1 de coordonnées  $x_1, y_1, z_1$ . Désignons par  $r_1$  la distance mutuelle du point de coordonnées  $x, y, z$  et du point de coordonnées  $x_1, y_1, z_1$ . Désignons enfin par  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière, c'est-à-dire le produit  $\alpha T$ . L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur  $\varphi$ , hypothèse permise d'ailleurs si  $\varphi$  désigne l'une des quantités  $U, V, W$ , consiste à poser

$$(3) \quad \varphi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{\ell}{T} \right).$$

Ayant cette expression de  $\varphi$ , il est facile d'en déduire une autre expression plus générale qui se rapporte au même cas. Il suffit de multiplier l'expression précédente de  $\varphi$  par un facteur constant, d'ajouter à  $t$  une constante, de différentier une fois, puis une seconde, par rapport à  $x_1$ ,

à  $y_1$  ou à  $z_1$ , et d'ajouter ensemble, membre à membre, toutes les égalités ainsi obtenues.

On peut faire subir au résultat de cette opération une simplification importante : il suffit pour cela d'introduire une hypothèse qui a, en Optique, une importance capitale, à savoir l'hypothèse que la longueur d'onde peut être traitée comme un infiniment petit. Dès lors, si l'on tient compte seulement des termes de l'ordre le plus élevé, on obtient le résultat suivant :

$$(4) \quad \varphi = \frac{D}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{D'}{r_1} \sin 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

Dans cette expression, les quantités  $D$  et  $D'$  dépendent de  $\frac{\partial r_1}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial r_1}{\partial y_1}$ ,  $\frac{\partial r_1}{\partial z_1}$ , ou, ce qui revient au même, de  $\frac{\partial r_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial r_1}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial r_1}{\partial z}$ , c'est-à-dire que ces quantités dépendent de la *direction* de la ligne  $r_1$ ; à part cela, elles sont constantes.

En vertu des équations (2),  $u$ ,  $v$ ,  $w$  admettent des expressions de même forme; selon que  $\varphi$  sera égal à  $u$ , à  $v$  ou bien à  $w$ , désignons les valeurs de  $D$ ,  $D'$  par  $A$ ,  $A'$ , par  $B$ ,  $B'$ , ou bien par  $C$ ,  $C'$ . Ces six lettres représenteront des quantités qui dépendent de la direction de la ligne  $r_1$ , mais qui, à part cela, sont constantes. L'intensité de la lumière aura alors pour valeur, au point de coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,

$$\frac{1}{2r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Cette expression montre que l'intensité dont il s'agit est inversement proportionnelle au carré de la distance du point considéré au point lumineux. Elle montre, en outre, que cette intensité varie avec la direction de la ligne  $r_1$ . La loi de ces variations se relie à la loi du mouvement du point lumineux.

Dans ce qui va suivre, nous prendrons pour source de lumière un point lumineux semblable à celui que nous venons de considérer et nous rechercherons comment la lumière qu'il émet est modifiée par un corps étranger placé dans le voisinage de ce point. Au cours de ces recherches, nous aurons à faire usage d'un lemme important: Ce lemme se déduit de l'application du théorème de Green aux fonctions qui sa-

tisfont à l'équation aux dérivées partielles que  $\varphi$  vérifie. Ce lemme constitue une forme plus précise et plus générale de la proposition bien connue sous le nom de *principe d'Huygens*. M. Helmholtz l'a déjà démontré dans son Mémoire intitulé *Théorie de la vibration de l'air dans les tuyaux ouverts* (1), et il en a montré l'importance; dans le numéro suivant, nous allons exposer ce théorème sous une autre forme, en suivant une voie différente.

2. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de  $x, y, z$  continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables  $x, y, z$  en tous les points d'un espace limité (cet espace peut d'ailleurs se composer de plusieurs parties séparément limitées). Désignons par  $d\tau$  un élément de volume de cet espace. Soit  $ds$  un élément de la surface qui le limite (cette surface peut aussi se composer de plusieurs parties séparément limitées). Désignons par  $N$  la normale à l'élément  $ds$ , cette normale étant dirigée vers l'intérieur de l'espace considéré. Le théorème de Green donne l'égalité

$$\int \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) ds = \int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) d\tau.$$

Dans cette égalité, posons  $\varphi = \varphi$  et supposons tout d'abord que  $\psi$  satisfasse aussi à l'équation (1); nous aurons

$$\int \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) ds = \frac{1}{a^2} \int \left( \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) d\tau$$

ou bien

$$\int \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) ds = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par  $dt$  et intégrons entre deux valeurs du temps, l'une négative, que nous désignerons par  $-t'$ , l'autre positive, que nous désignerons par  $t''$ . Nous obtiendrons alors, en faisant usage d'un symbole bien connu, l'égalité

$$(5) \quad \int_{-t'}^{t''} dt \int \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) ds = \frac{1}{a^2} \left[ \int \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau \right]_{-t'}^{t''}.$$

---

(1) HELMHOLTZ, *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band LVII).

Posons maintenant

$$\varphi = \frac{F(r_0 + at)}{r_0},$$

expression dans laquelle  $r_0$  désigne la distance du point de coordonnées  $x, y, z$  à un certain point  $o$  choisi arbitrairement, tandis que  $F$  désigne une fonction qui devient infiniment petite pour toute valeur finie, positive ou négative de la variable dont elle dépend, qui n'est jamais négative et qui, en outre, satisfait à la condition

$$(6) \quad \int F(\zeta) d\zeta = 1,$$

pourvu que l'intégration s'étende d'une valeur négative et finie de  $\zeta$  à une valeur positive et finie de la même quantité.

Considérons maintenant un espace entièrement clos, rempli par l'éther homogène et ne renfermant aucun point lumineux. Désignons par  $s$  la surface qui le limite et par  $ds$  un élément de cette surface. Prenons le point  $o$  à l'intérieur de cet espace. Du point  $o$  comme centre, décrivons une sphère infiniment petite et appliquons l'égalité (5) à ce qui reste de l'espace considéré lorsqu'on en exclut le volume de cette sphère. Désignons par  $dS$  un élément de la surface de cette sphère. Prenons pour  $t'$  une valeur assez grande pour que la quantité

$$r_0 - at'$$

soit négative et finie lorsqu'on y remplace  $r_0$  par la plus grande des valeurs que  $r_0$  prend sur la surface  $s$ ; cette quantité sera *a fortiori* négative et finie dans tout l'espace considéré. Moyennant ces conditions, les valeurs de  $\varphi$  et de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  qui figurent au second membre de l'égalité (5) correspondent à des valeurs positives ou négatives, mais *finies*, de  $r_0 + at$ ; ces valeurs sont donc égales à zéro. L'égalité (5) devient alors

$$(7) \quad \int_{-r}^{+r} dt \int \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) ds + \int_{-r}^{+r} dt \int \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS = 0.$$

Les intégrales que renferme le second terme peuvent être effectuées. Désignons par  $R$  le rayon de la sphère infiniment petite, et, dans le

calcul de l'expression qui multiplie  $dS$ , négligeons toute quantité dont le produit par  $R^2$  est infiniment petit. Nous pourrions alors poser

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = -\frac{1}{R^2} F(at), \quad \varphi = 0,$$

et nous aurons

$$\int \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS = -4\pi \varphi_0 F(at),$$

$\varphi_0$  désignant la valeur de  $\varphi$  au point 0. Remarquons maintenant que la quantité  $F(at)$  ne diffère de zéro que pour les valeurs infiniment petites de  $at$ , et que, en vertu de l'équation (6), on a

$$\int_{-r}^{r'} F(at) dt = \frac{1}{a}.$$

Nous trouverons pour valeur du second terme de l'équation (7)

$$-\frac{4\pi}{a} \varphi_0(0),$$

expression dans laquelle  $\varphi_0(0)$  désigne la valeur de  $\varphi_0$  pour  $t = 0$ .

Dans le premier terme de l'équation (7) on peut également, grâce à l'équation (6), effectuer l'intégration par rapport à  $t$ . On a tout d'abord

$$a \int_{-r}^{r'} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} dt = a \int_{-r}^{r'} \frac{F(r_0 + at)}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N} dt = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

Dans la dernière valeur de  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  on doit supposer qu'après avoir effectué la différentiation on pose

$$t = -\frac{r_0}{a}.$$

Si l'on pose

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = f(t),$$

l'expression  $\frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N}$ , qui figure dans l'égalité en question, aura pour valeur

$$\frac{1}{r_0} f\left(-\frac{r_0}{a}\right).$$

Nous avons ensuite

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = - \frac{\partial \frac{F(r_0 + at)}{r_0}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} F(r_0 + at) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{1}{a} \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t}$$

et, par suite,

$$a \int_{-r}^{r} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} dt = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi \left( -\frac{r_0}{a} \right) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \int_{-r}^{r} \varphi \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t} dt,$$

expression dans laquelle  $\varphi \left( -\frac{r_0}{a} \right)$  désigne la valeur de  $\varphi$  pour  $t = -\frac{r_0}{a}$ . Transformons la dernière intégrale au moyen d'une intégration par parties, et remarquons que la fonction  $F$  s'annule toutes les fois que la variable dont elle dépend prend une valeur finie; nous trouverons pour valeur de l'expression précédente

$$\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi \left( -\frac{r_0}{a} \right) - \frac{1}{a} \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Dans cette dernière expression,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  a la valeur qu'il prend pour  $t = -\frac{r_0}{a}$ .

En reportant dans l'égalité (7) les résultats que nous venons d'obtenir, et en changeant l'origine des temps de telle façon que l'instant qui, dans ce qui précède, servait d'origine, devienne maintenant l'instant  $t$ , nous obtiendrons le résultat suivant :

$$(9) \quad 4\pi \varphi_0(t) = \int \left[ \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi \left( t - \frac{r_0}{a} \right) - \frac{1}{a} \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi \left( t - \frac{r_0}{a} \right)}{\partial t} - \frac{1}{r_0} f \left( t - \frac{r_0}{a} \right) \right] ds.$$

Les deux premiers termes de l'expression qui multiplie  $ds$  peuvent être réunis en un seul, qui est le suivant

$$\frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi \left( t - \frac{r_0}{a} \right)}{r_0},$$

en convenant, dans cette différentiation, de regarder  $r_0$  comme seul



variable, et de conserver aux autres quantités dont dépend  $\varphi(t)$  les valeurs qu'elles ont en un point de l'élément  $ds$ . On a alors

$$(10) \quad 4\pi \varphi_0(t) = \int \Omega ds,$$

égalité dans laquelle on a

$$(11) \quad \Omega = \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0},$$

et dans laquelle la fonction  $f$  a la signification définie par l'égalité (8).

De ces résultats découle la conséquence suivante :

Le mouvement de l'éther à l'intérieur de l'espace que limite la surface  $s$  peut être regardé comme provenant d'une couche de points lumineux distribués sur la surface  $s$ ; en effet, chacun des deux termes qui composent  $\Omega$  peut être regardé comme provenant d'une source de lumière concentrée en un point de l'élément  $ds$ .

Le raisonnement suivant permet de démontrer que, moyennant une certaine condition que nous supposerons toujours remplie dans la suite, l'équation (10) demeure encore exacte lorsque tous les points lumineux sont situés à l'intérieur de la surface  $s$ , et que le point  $o$  est extérieur à cette surface; seulement, dans ce cas, la normale  $N$  doit être comptée vers l'extérieur de la surface. Dans ce cas, appliquons l'égalité (10) à un espace limité intérieurement par la surface  $s$  et extérieurement par une sphère de rayon infiniment grand. Soit  $dS$  un élément de la surface de cette sphère. Nous obtiendrons l'égalité

$$4\pi \varphi_0(t) = \int \Omega ds + \int \Omega dS.$$

Supposons maintenant que, jusqu'à une certaine valeur finie du temps, l'équilibre ait régné dans tout l'espace. Dès lors, pour une valeur négative et infiniment grande de  $t$ , les quantités  $\varphi(t)$  et  $f(t)$  sont égales à zéro en tous les points de l'espace, et, en particulier, en tous les points de la surface de la sphère infiniment grande. Cela étant, supposons que l'on choisisse le point  $o$  à distance finie et que l'on considère uniquement des valeurs finies du temps; la quantité  $\Omega$  sera alors égale à zéro

pour tous les éléments  $dS$ , car, en tout point de la surface de la sphère,  $t - \frac{r_0}{a}$  est négatif et infiniment grand. Dès lors, nous obtiendrons l'équation (10). Nous avons introduit, il est vrai, cette restriction que le point  $o$  est situé à une distance finie et que le temps a une valeur finie; mais cette restriction n'est qu'apparente; quelle que soit la position du point  $o$  et la valeur de  $t$ , on peut choisir le rayon de la sphère assez grand pour que les considérations précédentes conservent leur valeur.

Si l'on applique l'égalité (10) à deux surfaces fermées qui ont une partie commune et qui renferment toutes deux le point  $o$  sans renfermer les points lumineux, ou toutes deux les points lumineux sans renfermer le point  $o$ , et si l'on retranche membre à membre les deux résultats obtenus de la sorte, on arrive à la conclusion suivante :

L'intégrale  $\int \Omega ds$ , étendue à une surface fermée qui ne renferme ni le point  $o$ , ni les points lumineux, est égale à zéro.

Cette intégrale s'annule encore pour une surface fermée qui enveloppe à la fois le point  $o$  et les points lumineux. On le reconnaît en appliquant successivement l'équation (10) à deux surfaces fermées qui ont une partie commune et dont l'une renferme le point  $o$  sans renfermer les points lumineux, tandis que l'autre renferme les points lumineux sans renfermer le point  $o$ .

On voit immédiatement comment on aura à appliquer l'équation (10) au problème qui nous occupe et qui a été énoncé au commencement du paragraphe précédent. Supposons que l'espace indéfini soit rempli par de l'éther homogène. Dans cet espace se trouve un point lumineux  $\iota$ . Il engendre un mouvement auquel correspond une certaine fonction  $\varphi'$ . Supposons que, dans l'espace, on introduise un corps étranger; le mouvement est modifié; la fonction  $\varphi'$  se transforme en la fonction  $\varphi$ ; le problème consiste à déterminer la valeur de la fonction  $\varphi$  pour tout point extérieur au corps. Désignons par  $ds$  un élément de la surface du corps et par  $dS$  un élément de la surface d'une sphère infiniment petite ayant pour centre le point lumineux. En vertu de l'égalité (10), nous aurons

$$4\pi\varphi_0 = \int \Omega dS + \int \Omega ds.$$

La première de ces deux intégrales a une valeur facile à déterminer. La variation que subit le mouvement en un point de l'élément  $dS$  par l'effet de l'introduction du corps étranger n'est pas infiniment grande, si l'on excepte un certain cas particulier. Comme d'ailleurs la surface sphérique dont fait partie l'élément  $dS$  est infiniment petite, cette variation n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale. On peut donc, dans cette intégrale, remplacer  $\varphi$  par  $\varphi'$ . Alors, en vertu de l'équation (10), si l'on désigne par  $\varphi'(0)$  la valeur de  $\varphi'$  au point 0, cette intégrale aura pour valeur  $4\pi \varphi'(0)$ . On a donc

$$(12) \quad 4\pi \varphi(0) = 4\pi \varphi'(0) + \int \Omega ds.$$

Cette équation permet, en général, de déterminer  $\varphi(0)$  lorsqu'on connaît la fonction  $\varphi'$  et que l'on connaît en outre, pour tous les points de la surface du corps, les valeurs de  $\varphi$  et de  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ .

3. Avant de pousser plus loin nos recherches, il nous faut déterminer la valeur que prend l'intégrale  $\int \Omega ds$  étendue à une surface *limitée*, au moins sous certaines conditions. C'est cette valeur que nous allons maintenant chercher.

Nous supposerons, pour effectuer cette recherche, que la longueur d'onde est infiniment petite. Nous supposerons que la quantité  $\varphi$  se rapporte au mouvement produit par un point lumineux et est, par conséquent, exprimée par l'égalité (4). Nous supposerons que, pour aucune portion d'étendue finie, soit de l'aire à laquelle s'étend l'intégration, soit de la ligne qui limite cette aire, la quantité  $r_1 + r_0$  n'a une valeur constante ou une valeur différant infiniment peu d'une constante. Enfin, nous supposerons que la ligne droite qui joint les points 1 et 0 ne passe ni par un point du contour de la surface, ni par un point infiniment voisin de ce contour.

Dans ces conditions, nous démontrerons que l'intégrale considérée est égale à 0 si la ligne droite qui joint les points 1 et 0 ne rencontre pas la surface  $s$ . Le calcul nous montrera que, dans le cas où cette droite rencontre la surface  $s$ , l'intégrale en question a pour valeur  $\pm 4\pi \varphi_0$ , le signe  $+$  devant être choisi si la normale  $N$  au point de

rencontre fait un angle aigu avec la ligne droite menée du point 1 au point 0, et le signe — devant être choisi si cet angle est obtus. D'ailleurs, ce dernier résultat dérive immédiatement de l'équation (10), si, conformément à ce que nous venons d'énoncer, l'intégrale considérée est égale à 0 lorsque la droite ne rencontre pas la surface.

Prenons tout d'abord pour  $\varphi$  la valeur donnée par l'égalité (3); posons, par conséquent,

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_0} \varphi \left( t - \frac{r_0}{a} \right) = & - \frac{1}{r_1 r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial N} \cos 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ & - \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \frac{\partial r_0}{\partial N} \sin 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right), \end{aligned}$$

puis, en vertu de l'égalité (8),

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} f \left( t - \frac{r_0}{a} \right) = & - \frac{1}{r_1^2 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \cos 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ & - \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \frac{\partial r_1}{\partial N} \sin 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right). \end{aligned}$$

L'égalité (11) nous donnera alors

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \cos 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ & + \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour déduire de cette valeur de  $\Omega$  la valeur de l'intégrale considérée, nous prendrons pour point de départ le théorème suivant :

*Soient  $F(\zeta)$  une fonction de  $\zeta$  qui demeure continue lorsque  $\zeta$  croît de  $\zeta_0$  à  $\zeta_1$ , et  $\delta$  une constante. L'intégrale*

$$(14) \quad \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{dF}{d\zeta} \sin(K\zeta + \delta) d\zeta$$

*tend vers 0 lorsque  $K$  croît au delà de toute limite.*

L'exactitude de ce théorème peut être établie par des considérations tout à fait analogues à celles que Dirichlet a exposées, dans ses recherches sur la série de Fourier, au sujet d'une intégrale semblable. On partagera l'intervalle compris entre les limites de l'intégration en parties telles que, dans chacune d'elles, la quantité  $\frac{dF}{d\zeta}$  conserve un signe constant et aille sans cesse en croissant ou sans cesse en décroissant; on supposera que le nombre de ces parties est fini; pour démontrer ensuite que l'intégrale considérée s'annule pour chacune de ces parties lorsque  $K$  devient infiniment grand, il suffira de partager chacune d'elles en intervalles secondaires, de telle façon que toutes les valeurs de  $\zeta$  pour lesquelles  $\sin(K\zeta + \delta)$  est égal à zéro marquent les points de division entre ces intervalles, et d'écrire les inégalités faciles à trouver auxquelles satisfont les valeurs absolues des intégrales relatives à ces intervalles.

Le théorème dont nous venons de parler entraîne le suivant :

*Si la dérivée première de la fonction  $F(\zeta)$  est continue dans l'intervalle compris entre  $\zeta = \zeta_0$  et  $\zeta = \zeta_1$ , on a, lorsque  $K$  croît au delà de toute limite, l'égalité limite*

$$(15) \quad K \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{dF}{d\zeta} \sin(K\zeta + \delta) d\zeta = - \left[ \frac{dF}{d\zeta} \cos(K\zeta + \delta) \right]_{\zeta_0}^{\zeta_1}.$$

En effet, le premier membre de cette égalité peut, au moyen d'une intégration par parties, s'écrire

$$- \left[ \frac{dF}{d\zeta} \cos(K\zeta + \delta) \right]_{\zeta_0}^{\zeta_1} + \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{d^2F}{d\zeta^2} \cos(K\zeta + \delta) d\zeta;$$

mais la nouvelle intégrale qui figure dans cette expression est de même forme que l'intégrale (14). Elle tend donc vers zéro lorsque  $K$  croît au delà de toute limite.

Considérons maintenant une surface  $s$ , limitée de tous côtés, dont les courbures varient d'une manière continue d'un point à un autre. Soit  $ds$  un élément de cette surface. Soient  $r_1$  et  $r_0$  les distances d'un point de cet élément à deux points fixes 1 et 0, et posons

$$\zeta = r_1 + r_0.$$

Désignons en outre par  $G$  une quantité qui varie d'une manière continue avec la position de l'élément  $ds$ , par  $\delta$  une constante, et cherchons vers quelle limite tend l'intégrale

$$(16) \quad \int G \sin(K\zeta + \delta) ds$$

lorsque  $K$  croît au delà de toute limite.

Pour y parvenir, traçons la surface représentée par l'équation

$$\zeta = \text{const.}$$

Cette surface est un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers les deux points 1 et 0. Cet ellipsoïde coupe la surface suivant une certaine ligne. Envisageons la partie de la surface  $s$  qui se trouve comprise entre deux de ces lignes d'intersection, l'une correspondant à la valeur variable  $\zeta$  et l'autre à une valeur constante arbitrairement choisie de  $\zeta$ , que nous nommerons  $Z$ . Posons

$$(17) \quad F(\zeta) = \pm \int G ds,$$

l'intégrale qui s'étend à la portion de la surface  $s$  que nous venons de définir étant précédée du signe  $+$  si l'on a  $\zeta > Z$  et du signe  $-$  si l'on a  $\zeta < Z$ . D'après ces notations, si nous supposons que  $d\zeta$  soit un accroissement positif, nous aurons

$$\frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int G ds,$$

l'intégration qui s'étend à la portion de la surface  $s$  comprise entre les lignes d'intersection de cette surface avec les deux ellipsoïdes qui correspondent aux valeurs  $\zeta$  et  $\zeta + d\zeta$  de  $\zeta$ . Désignons par  $\zeta_0$  la moindre valeur de  $\zeta$  sur la surface  $s$  et par  $\zeta_1$  la plus grande valeur de  $\zeta$  sur la même surface. L'intégrale (16) aura alors pour valeur

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{dF}{d\zeta} \sin(K\zeta + \delta) d\zeta.$$

Elle deviendra donc identique à l'intégrale (14). Elle tend donc vers zéro lorsque  $K$  croît au delà de toute limite si la fonction  $F(\zeta)$  est con-

tinue en tous les points de la surface  $s$ . C'est ce qui a lieu si  $\zeta$  n'a une valeur constante pour aucune portion d'aire finie de la surface  $s$ .

Envisageons maintenant, en conservant les mêmes notations, l'expression

$$(19) \quad K \int G \sin(K\zeta + \delta) ds.$$

Par une transformation semblable elle devient identique à l'intégrale

$$K \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{dF}{d\zeta} \sin(K\zeta + \delta) d\zeta$$

qui forme le premier membre de l'égalité (15). Si donc la quantité  $\frac{dF}{d\zeta}$ , définie par l'égalité (18), est continue en tous les points de la surface  $s$ , cette intégrale tend vers le second membre de l'égalité (15) lorsque  $K$  croît au delà de toute limite.

La dérivée  $\frac{dF}{d\zeta}$  est discontinue si la quantité  $\zeta$  est constante le long d'une portion d'étendue finie du contour de la surface  $s$ . Si l'on exclut ce cas d'exception, cette dérivée ne peut présenter de discontinuité que si la différentielle  $d\zeta$  s'annule en un point de la surface. Il nous faudra chercher en particulier ce qui arrive dans ce cas. Si, pour le moment, laissant de côté ces cas d'exception, nous admettons l'exactitude de l'égalité (15), nous en déduisons sans peine que l'expression (19) tend vers zéro lorsque  $K$  croît au delà de toute limite. En effet, en vertu des hypothèses que nous faisons en rejetant les cas d'exception, c'est seulement pour un point ou pour un certain nombre de points du contour de la surface  $s$  que  $\zeta$  atteint sa plus grande valeur. Il en est de même pour la plus petite valeur de  $\zeta$ . Pour chacun des points dont il s'agit, l'intégrale  $\int G ds$  dont il faut calculer la valeur pour obtenir, au moyen de l'égalité (18), la valeur correspondante de  $\frac{dF}{d\zeta}$  est un infiniment petit d'un ordre plus élevé que l'ordre de  $d\zeta$ ; la valeur correspondante de  $\frac{dF}{d\zeta}$  est donc égale à zéro.

Cherchons maintenant la valeur de l'expression (19) dans le cas où

$d\zeta$  s'annule en un point de la surface  $s$ . Soient

$$g(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface  $s$ , et  $x, y, z$  les coordonnées du point où  $d\zeta$  s'annule. On a alors

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_0}{\partial x} = L \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial r_0}{\partial y} = L \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = L \frac{\partial g}{\partial z},$$

$L$  désignant un facteur indéterminé. Soient  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la ligne menée du point 1 au point de coordonnées  $x, y, z$ ; soient  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la ligne menée du point 0 au point de coordonnées  $x, y, z$ ; soient, enfin,  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la normale  $N$  menée à la surface  $s$  au point de coordonnées  $x, y, z$ . Les égalités précédentes peuvent s'écrire

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_0 = M\alpha, \\ \beta_1 + \beta_0 = M\beta, \\ \gamma_1 + \gamma_0 = M\gamma. \end{cases}$$

$M$  désignant un nouveau facteur.

Ces égalités démontrent tout d'abord que les trois lignes  $r_1, r_0$  et  $N$  sont dans un même plan; elles montrent aussi que l'on a

$$M(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = M(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0).$$

Cette dernière égalité exprime que l'on a l'une des deux conséquences suivantes :

Ou bien l'on a

$$M = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = -\alpha_0, \quad \beta_1 = -\beta_0, \quad \gamma_1 = -\gamma_0,$$

et alors le point de coordonnées  $x, y, z$  est situé entre les points 1 et 0 sur la droite qui les joint.

Ou bien les deux directions que définissent les cosinus  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$



et  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  forment des angles égaux avec la direction de la normale N. Dans ce dernier cas, les lignes  $r_1$  et  $r_0$  se trouvent de part et d'autre de la normale N, à moins qu'elles ne coïncident avec cette normale ou avec son prolongement; car les égalités (20) ne peuvent être vérifiées par  $\alpha_0 = \alpha_1, \beta_0 = \beta_1, \gamma_0 = \gamma_1$ , à moins que les lignes  $r_0$  et  $r_1$  ne coïncident avec la normale N ou avec son prolongement.

Changeons maintenant la signification des lettres  $x, y, z$ . Désignons par  $x, y, z$  les coordonnées d'un point variable de la surface  $s$  par rapport à un système de coordonnées ayant pour origine le point qui avait précédemment pour coordonnées  $x, y, z$  et ayant pour axe des  $z$  la normale N. Supposons, en outre, que la surface  $s$  soit réduite à une aire infiniment petite, bien qu'infiniment grande par rapport à  $\frac{1}{K}$ . Il nous suffira évidemment de calculer la valeur de l'intégrale (19) dans cette hypothèse, car ce que nous avons déjà démontré nous prouve que l'addition de nouvelles parties à la surface  $s$  ne modifierait pas la valeur de l'intégrale.

La surface  $s$  a alors pour équation

$$(21) \quad z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}$  étant des constantes. On a, en outre,

$$ds = dx dy.$$

Pour déterminer la forme des lignes d'intersection de la surface  $s$  avec les surfaces  $\zeta = \text{const.}$ , nous allons former l'expression de  $\zeta$  et développer  $\zeta$  suivant les puissances croissantes de  $x$  et de  $y$ .

Soient  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées du point o, et posons

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Nous aurons alors

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

ou bien

$$r_0 = \sqrt{\rho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Considérons  $x$  et  $y$  comme des quantités infiniment petites du second ordre, et développons  $r_0$ , en faisant usage de l'équation (21), jus-

qu'aux quantités du second ordre inclusivement. Nous aurons alors

$$r_0 = \rho_0 - \frac{xx_0 + y\gamma_0}{\rho_0} - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}{\rho_0} z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2\rho_0} - \frac{(xx_0 + y\gamma_0)^2}{2\rho_0^3}.$$

Mais les quantités  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  qui figurent dans les égalités (20) vérifient les relations

$$\frac{x_0}{\rho_0} = -\alpha_0, \quad \frac{y_0}{\rho_0} = -\beta_0, \quad \frac{z_0}{\rho_0} = -\gamma_0;$$

on a donc

$$r_0 = \rho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_0 + \frac{1}{2\rho_0} [x^2(1 - \alpha_0^2) - 2xy\alpha_0\beta_0 + y^2(1 - \beta_0^2)].$$

Posons de même

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

nous trouverons

$$r_1 = \rho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_1 + \frac{1}{2\rho_1} [x^2(1 - \alpha_1^2) - 2xy\alpha_1\beta_1 + y^2(1 - \beta_1^2)].$$

Mais, grâce au système particulier de coordonnées que nous avons adopté, nous avons

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0,$$

et, par conséquent, en vertu des égalités (20),

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0.$$

Nous aurons donc

$$\zeta = A_0 + A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2,$$

égalité dans laquelle on a

$$(22) \quad \begin{cases} A_0 = \rho_0 + \rho_1, \\ A_{11} = a_{11}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1 - \alpha_1^2}{2\rho_1} + \frac{1 - \alpha_0^2}{2\rho_0}, \\ A_{12} = a_{12}(\gamma_1 + \gamma_0) - \frac{\alpha_1\beta_1}{2\rho_1} - \frac{\alpha_0\beta_0}{2\rho_0}, \\ A_{22} = a_{22}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1 - \beta_1^2}{2\rho_1} + \frac{1 - \beta_0^2}{2\rho_0}. \end{cases}$$

Les courbes d'intersection des surfaces  $\zeta = \text{const.}$  avec la surface  $s$  sont, d'après cela, des sections coniques semblables et semblablement placées qui ont toutes pour centre l'origine des coordonnées. Supposons que l'équation de ces sections coniques rapportées à leurs axes principaux soit

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2,$$

ou bien, en d'autres termes, désignons par  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les racines de l'équation du second degré

$$(23) \quad (A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}^2 = 0.$$

Si les deux quantités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont de même signe, les sections coniques considérées sont des ellipses. Dans ce cas, si les quantités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont toutes deux positives,  $A_0$  est une valeur minima de  $\zeta$ ; si, au contraire, les quantités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont toutes deux négatives,  $A_0$  est un maximum de  $\zeta$ . Dans le premier cas, l'aire de l'ellipse qui correspond à une certaine valeur de  $\zeta$  a pour valeur

$$\frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Dans le second cas, elle a pour valeur

$$\frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Dans les deux cas, les radicaux doivent être pris avec le signe  $+$ , de telle façon que la racine carrée d'une quantité positive soit elle-même une quantité positive.

Reprenons maintenant l'égalité (17). Donnons la valeur  $A_0$  à la quantité que, dans cette équation, nous avons désignée par  $Z$ . Pour toutes les valeurs de  $\zeta$  qui correspondent à des ellipses situées entièrement à l'intérieur de la surface  $s$ , nous aurons, dans l'un comme dans l'autre cas,

$$F(\zeta) = G \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

égalité dans laquelle  $G$  se rapporte au point de coordonnées  $x = 0$ ,

$y = 0$ . Nous aurons alors

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Supposons qu'aucune partie du contour de la surface  $s$  ne coïncide avec l'une des ellipses que nous considérons;  $\frac{dF}{d\zeta}$  varie alors d'une manière continue à l'intérieur de cette surface; cette quantité s'annule pour la deuxième valeur limite que prend  $\zeta$  sur la surface  $s$ . Donc, lorsque  $K$  croît au delà de toute limite, si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ont des valeurs positives, l'expression (19) tend vers

$$(24) \quad G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(KA_0 + \delta)$$

et, si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ont des valeurs négatives, elle tend vers

$$(25) \quad G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(KA_0 + \delta).$$

Le calcul à effectuer n'est pas aussi simple dans le cas où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ont des signes contraires. Les sections coniques sont alors des hyperboles. Dans ce cas,  $\frac{dF}{d\zeta}$  est discontinu pour  $\zeta = A_0$ . Prenons les axes principaux des sections coniques pour axes de coordonnées et donnons à la surface  $s$  une forme particulière : celle d'un rectangle dont les côtés, parallèles aux axes principaux, sont représentés par les équations

$$x = \pm a, \quad y = \pm b.$$

Arrangeons-nous de telle manière que les sommets de ce rectangle soient sur les asymptotes. Il faudra pour cela que nous ayons

$$a\sqrt{\mu_1} = b\sqrt{-\mu_2} = c,$$

$\mu_1$  étant supposé positif et  $\mu_2$  négatif. L'axe transverse de l'hyperbole qui correspond à une certaine valeur de  $\zeta$  coïncide alors avec l'axe des  $x$  si, pour cette valeur de  $\zeta$ ,  $\zeta - A_0$  est positif, et avec l'axe des  $y$  si  $\zeta - A_0$  est négatif. Donnons maintenant de nouveau à la quantité  $Z$ , définie à propos de l'égalité (17), la valeur  $A_0$ , et nous aurons, pour

les valeurs de  $\zeta$  supérieures à  $A_0$ ,

$$F(\zeta) = G \left( 2ab - \frac{4}{\sqrt{-\mu_2}} \int_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^a \sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0} dx \right),$$

G se rapportant encore au point de coordonnées  $x = 0$ ,  $y = 0$ . De là, nous déduisons

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{2}{\sqrt{-\mu_2}} \int_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^a \frac{dx}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}}.$$

Mais on a

$$\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

On a donc

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}.$$

On trouve de même, pour les valeurs de  $\zeta$  inférieures à  $A_0$ ,

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} \log \frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}.$$

Remarquons maintenant que la moindre valeur de  $\zeta$  correspond aux points de coordonnées  $x = 0$ ,  $y = \pm b$  et est égale à  $A_0 - c^2$ , tandis que la plus grande valeur de  $\zeta$  correspond aux points de coordonnées  $x = \pm a$ ,  $y = 0$ , et est égale à  $A_0 + c^2$ ; nous aurons alors, pour valeur de l'expression (19),

$$G \frac{2}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} K \left[ \int_{A_0 - c^2}^{A_0} \log \frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}} \sin(K\zeta + \delta) d\zeta \right. \\ \left. + \int_{A_0}^{A_0 + c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}} \sin(K\zeta + \delta) d\zeta \right].$$

Dans la première de ces intégrales, posons

$$A_0 - \zeta = \xi.$$

Dans la seconde, posons

$$\zeta - A_0 = \xi.$$

L'expression précédente deviendra

$$G \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} K \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} [\sin(K\xi + KA_0 + \delta) - \sin(K\xi - KA_0 - \delta)] d\xi$$

ou bien

$$G \frac{4}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} K \sin(KA_0 + \delta) \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \cos K\xi d\xi.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} & K \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \cos K\xi d\xi \\ &= \left( \sin K\xi \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \right)_{\xi=0}^{\xi=c^2} - \int_0^{c^2} \sin K\xi \frac{d}{d\xi} \log(c + \sqrt{c^2 - \xi}) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{c^2} \frac{\sin K\xi}{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Le premier de ces trois termes est égal à 0 pour toute valeur de  $K$ , car la quantité entre parenthèses s'annule aussi bien pour  $\xi = c^2$  que pour  $\xi = 0$ ; la deuxième rentre dans la forme générale de l'expression (14); comme  $\log(c + \sqrt{c^2 - \xi})$  est continu même pour  $\xi = c^2$ , elle tend vers 0 lorsque  $K$  croît au delà de toute limite, bien que sa dérivée croisse au delà de toute limite. Enfin, pour  $K = \infty$ , le troisième terme devient

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin u du}{u},$$

c'est-à-dire  $\frac{\pi}{4}$ .

La valeur de l'expression (19), valeur que nous cherchions à déterminer, est donc, dans le cas où les quantités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont de signe contraire,

$$(26) \quad G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \sin(KA_0 + \delta).$$

Pour continuer la discussion des expressions (24), (25) et (26), nous aurons à faire usage de cette relation

$$(27) \quad \mu_1 \mu_2 = A_{11} A_{22} - A_{12}^2.$$

que l'on obtient tout de suite en remarquant que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les racines de l'équation (23). Dans cette égalité (27),  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  ont les valeurs données par les égalités (22).

Ainsi que nous l'avons déduit des équations (20), les raisonnements qui précèdent se rapportent à deux cas distincts : le premier de ces deux cas est celui où la surface  $s$  est rencontrée par la ligne droite qui joint le point 1 au point 0; le second est celui où la surface  $s$  renferme un point jouissant de la propriété suivante. Les lignes menées de ce point au point 1 et au point 0 sont dans un même plan avec la normale à la surface en ce point et forment des angles égaux avec cette normale. Le premier de ces deux cas demande à être examiné de plus près.

Dans ce cas, on a

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = 0.$$

Les égalités (22) donnent alors

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \right) (1 - \alpha_1^2),$$

$$A_{12} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \right) \alpha_1 \beta_1,$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \right) (1 - \beta_1^2).$$

Ces égalités, jointes à l'égalité (27), donnent

$$\mu_1 \mu_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \right)^2 \gamma_1^2.$$

Les racines  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de l'équation (23) sont

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \right) \gamma_1^2.$$

Elles sont toutes deux positives. On peut donc remplacer l'expression (19) par l'expression (24) qui devient égale à

$$(28) \quad \pm 2\pi G \frac{\rho_1 \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} \frac{1}{\gamma_1} \cos[K(\rho_1 + \rho_0) + \delta].$$

Dans cette expression, on prendra le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que  $\gamma$ , sera positif ou négatif.

Dans tous les raisonnements dont l'expression (19) a été l'objet jusqu'à présent,  $\delta$  était considéré comme une constante; mais ces raisonnements resteraient exacts si  $\delta$  représentait, comme  $G$ , une quantité qui varie d'une manière continue avec la position de l'élément  $ds$ ; il faudrait seulement, dans les expressions (24), (25), (26) et (28), entendre que  $\delta$  se rapporte, comme  $G$ , au point de coordonnées  $x = 0$ ,  $y = 0$ . On le reconnaît au moyen de la remarque suivante :

La formule

$$\sin(K\zeta + \delta) = \cos\delta \sin K\zeta + \sin\delta \cos K\zeta$$

permet, dans le cas où  $\delta$  est une quantité variable, de remplacer l'intégrale (19) par une somme de deux intégrales de même forme, dans l'une desquelles  $\delta$  a la valeur constante 0, tandis que, dans l'autre,  $\delta$  a la valeur constante  $\frac{\pi}{2}$ .

Les résultats que nous venons d'obtenir nous rendent maintenant facile la démonstration de la proposition relative à l'intégrale  $\int \Omega ds$  que nous avons énoncée au début de ce paragraphe.

Supposons tout d'abord que  $\Omega$  ait la forme donnée par l'égalité (13), c'est-à-dire que  $\varphi$  ait la forme donnée par l'égalité (3). Posons

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} &= K, \\ -2\pi \frac{\ell}{T} &= \delta. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que la partie de l'intégrale considérée qui provient du premier terme de  $\Omega$  est toujours égale à 0; quant à la partie de cette intégrale qui provient du second terme de  $\Omega$ , elle est aussi égale à 0, à moins que la surface  $s$  ne soit rencontrée par la ligne qui joint le point 0 au point 1, ou bien encore qu'il n'existe sur la surface  $s$  un point tel que les lignes joignant ce point aux deux points 0 et 1 soient situées dans un même plan avec la normale à la surface  $s$  en ce point et forment avec elles des angles égaux.

Mais, même dans ce dernier cas d'exception, l'intégrale considérée est égale à 0; en effet, pour obtenir sa valeur, il faut, dans les expres-



sions (24), (25) ou (26), remplacer  $G$  par la valeur que prend au point considéré la quantité

$$(29) \quad \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right).$$

Mais  $\frac{\partial r_1}{\partial N}$  et  $\frac{\partial r_0}{\partial N}$  sont les cosinus d'angles qui sont égaux entre eux. La valeur en question n'est donc autre que 0.

Par conséquent, c'est seulement dans le cas où la surface  $s$  est rencontrée par la ligne qui joint les deux points 0 et 1 que l'intégrale  $\int \Omega ds$  diffère de 0. Pour obtenir, dans ce cas, la valeur de cette intégrale, il suffit, dans l'expression (28), de remplacer  $G$  par la valeur de la quantité (29) au point de rencontre de la droite qui joint les points 0 et 1 avec la surface  $s$ . Supposons que la direction de la normale  $N$ , qui figure dans l'égalité (13), coïncide avec l'axe des  $z$  auquel se rapporte la quantité  $\gamma_1$  qui figure dans l'expression (28). Nous aurons

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \gamma_1, \quad \frac{\partial r_0}{\partial N} = -\gamma_1,$$

et, par conséquent, la quantité (29) aura pour valeur

$$\frac{2\gamma_1}{\rho_1 \rho_0}.$$

Dès lors, nous aurons

$$\int \Omega ds = \pm \frac{4\pi}{\rho_1 + \rho_0} \cos 2\pi \left( \frac{\rho_1 + \rho_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

ou bien

$$\int \Omega ds = \pm 4\pi \varphi_0.$$

Dans cette égalité, on prendra le signe  $+$  ou le signe  $-$  selon que  $\gamma_1$  est positif ou négatif, c'est-à-dire selon que la normale  $N$  fait avec la ligne qui joint le point 1 au point 0 un angle aigu ou un angle obtus.

Le raisonnement que nous venons d'exposer démontre la proposition énoncée pour le cas particulier où  $\varphi$  a la forme donnée par l'égalité (3). Cette proposition ne cesse pas d'être exacte lorsqu'on passe, par le pro-

cédé qui a été indiqué, de la forme de  $\varphi$  donnée par l'égalité (3) à la forme plus générale donnée par l'égalité (4).

4. Il n'est possible de déduire des conséquences de l'équation (12) que si l'on a auparavant déterminé les valeurs de  $\varphi$  et de  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  à la surface du corps dont cette équation suppose l'existence.

Supposons que des ondes lumineuses planes, se propageant dans un milieu transparent, viennent tomber sur la surface plane qui sépare ce milieu d'un autre milieu. Elles donnent naissance à des ondes planes réfléchies et réfractées. Le fait que ces ondes existent et présentent la direction que l'expérience leur assigne peut être regardé comme la conséquence de la proposition suivante :

*Entre les déplacements que subissent des particules d'éther situées dans les deux milieux au voisinage immédiat de la surface de séparation des deux milieux et les dérivées de ces déplacements, il existe des relations linéaires, homogènes, à coefficients constants.*

Supposons que  $\varphi_i$  soit la valeur de la quantité  $\varphi$  au point de coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$ , pour la lumière incidente; que  $\varphi_r$  soit la valeur de la quantité  $\varphi$  au même point pour la lumière réfléchie. Supposons que  $\zeta$  soit négatif pour le premier milieu et positif pour le second milieu.

Soit

$$\varphi_i = A \cos 2\pi \left( \frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha}{T} \right),$$

$l, m, n$  désignant les cosinus des angles que fait avec les axes de coordonnées la normale à l'onde incidente dirigée dans le sens où cette onde se propage. On a alors, d'après la supposition que nous venons d'indiquer,

$$\varphi_r = cA \cos 2\pi \left( \frac{l\xi + m\eta - n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha + \gamma}{T} \right).$$

Dans cette formule,  $c$  et  $\gamma$  sont des constantes dont la valeur dépend de la variable que représente le symbole  $\varphi$ , de l'angle d'incidence, de l'état de polarisation de la lumière incidente et de la nature des deux milieux. D'après cela, on a, pour  $\zeta = 0$ , en remplaçant les symboles  $\varphi_i$  et  $\varphi_r$  par les symboles  $\varphi_i(t)$  et  $\varphi_r(t)$  auxquels on attribuera la même

signification,

$$(30) \quad \varphi_r(t) = c \varphi_i(t + \gamma)$$

et

$$\frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial \xi} = -c \frac{\partial \varphi_i(t + \gamma)}{\partial \xi}.$$

Si l'on désigne par N, comme dans ce qui précède, la normale à la surface de séparation des deux milieux dirigée vers l'intérieur du premier milieu, la seconde équation pourra aussi s'écrire

$$(30 \text{ bis}) \quad \frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial N} = -c \frac{\partial \varphi_i(t + \gamma)}{\partial N}.$$

Si la lumière incidente était composée d'un ensemble d'ondes diversement orientées, les quantités  $\varphi_i$  et  $\varphi_r$  seraient l'une et l'autre la somme d'un certain nombre de termes dont chacun serait analogue aux quantités que, dans les égalités précédentes, nous avons désignées par ces mêmes lettres  $\varphi_i$  et  $\varphi_r$ ; chacun de ces termes vérifierait alors des égalités analogues aux égalités (30) et (30 bis).

Ces théorèmes trouvent une application immédiate au cas auquel s'applique l'équation (12), si l'on suppose que la longueur d'onde  $\lambda$  est infiniment petite, et que la courbure de la surface du corps considéré ne prend en aucun point une valeur infiniment grande.

En vertu de l'équation (12), la quantité  $\varphi_o$ , c'est-à-dire la valeur de  $\varphi$  pour un point quelconque o de l'espace considéré, se présente comme une somme de termes dont l'un provient de l'action du point lumineux i, et les autres d'une couche de points lumineux distribués sur la surface qui limite cet espace. Prenons un point o infiniment voisin de cette surface, et supposons même que sa distance à cette surface puisse être regardée comme infiniment petite par rapport à  $\lambda$ . Les ondes lumineuses qui rencontrent ce point doivent être regardées les unes comme des ondes incidentes, les autres comme des ondes réfléchies ou réfractées, selon qu'elles marchent du point vers la surface ou de la surface vers le point. Les points lumineux dont proviennent les premières ondes sont tous situés d'un même côté d'un plan indéfini mené par le point o parallèlement à l'élément de la surface limite le plus voisin du point o. Les points lumineux d'où proviennent les

secondes ondes sont situés de l'autre côté de ce même plan. Supposons qu'il n'existe dans le second milieu aucune onde incidente; le premier renfermera alors uniquement des ondes incidentes et des ondes réfléchies. Supposons que la quantité  $\varphi_i$  se rapporte au mouvement déterminé au point que désigne ici la lettre  $o$  par la lumière incidente; que  $\varphi_r$  se rapporte au mouvement déterminé par la lumière réfléchie; enfin  $\varphi$  au mouvement résultant des deux précédents. Nous aurons

$$\varphi = \varphi_i + \varphi_r$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial N} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial N}.$$

En outre, on aura à faire usage des équations (30) et (30 bis) si la lumière se compose d'un seul système d'ondes; si l'on a à considérer plusieurs systèmes d'ondes, on fera usage des égalités qui correspondent alors aux équations (30) et (30 bis). A propos de ces dernières, nous avons indiqué en quoi consistaient ces égalités.

Il est un cas plus simple et plus accessible à l'imagination que le cas général. C'est celui où le second milieu est formé par un corps *complètement noir*, c'est-à-dire par un corps qui ne peut ni réfléchir la lumière ni la transmettre. L'expérience montre que si la lumière se propage dans un corps avec la même vitesse que dans le milieu ambiant, que si, de plus, ce corps absorbe les rayons lumineux avec une énergie suffisante, ce corps sera complètement noir. Dans ce cas, comme dans le cas d'un corps opaque quelconque, il n'existe aucune onde qui se meuve à l'intérieur du corps et qui vienne rencontrer sa surface; nous nous trouvons donc dans les conditions que nous avons supposées remplies. De plus, pour un semblable corps, la quantité que nous avons désignée par  $c$  est toujours égale à 0. Donc, les conditions qui doivent être supposées remplies à la surface d'un corps complètement noir sont les suivantes :

$$(31) \quad \varphi_r = 0, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = 0.$$

Cela posé, si nous imaginons que le corps dont l'équation (12) suppose l'existence soit un corps parfaitement noir et que sa surface soit convexe en tout point, nous trouverons aisément les valeurs que  $\varphi$  et

$\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  doivent prendre aux divers points de la surface de ce corps. Menons un plan tangent à la surface du corps, et, du côté de ce plan où le corps ne se trouve point, menons un second plan parallèle au premier et infiniment voisin du premier. La surface du corps est située tout entière d'un même côté de ce plan. Dès lors, les termes qui proviennent d'un élément quelconque  $ds$  de la surface figurent toujours dans l'expression de la quantité  $\varphi_r$ , jamais dans l'expression de la quantité  $\varphi_i$ . Traçons un cône ayant pour sommet le point lumineux 1 et tangent à la surface. La ligne de contact de ce cône avec la surface partage cette dernière en deux régions : l'une est vue du point lumineux, l'autre lui est cachée. Désignons ici encore par  $\varphi'$  la valeur de la fonction  $\varphi$  relative au mouvement que prendrait le point o si le corps noir était enlevé. Si le point o est infiniment voisin de la région de la surface du corps qui est vue du point 1, le terme qui provient du point 1 entre dans l'expression de  $\varphi_i$  et a pour valeur  $\varphi'$ . Si, au contraire, le point o est infiniment voisin de la région cachée au point 1, c'est dans l'expression de  $\varphi_r$  qu'entre le terme provenant du point 1.

On a donc, pour tous les points de la première région,

$$(32) \quad \varphi = \varphi', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N};$$

pour tous les points de la seconde région, on a

$$\varphi_i = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial N} = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (31),

$$(33) \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Supposons maintenant que le corps noir, au lieu d'être entièrement convexe, ait une forme quelconque. Les équations (31) seront encore vérifiées si l'on écrit les équations (32) pour tous les points où la surface du corps est rencontrée *pour la première fois* par une droite issue du point 1, et les équations (33) pour tous les autres points. En effet, si l'on admet l'exactitude de ces équations, on déduit du théorème dé-

montré au n° 3 que l'intégrale  $\int \Omega ds$ , étendue à toute la surface du corps, s'annule lorsque le point  $o$  est infiniment voisin de la *première* région de la surface, et est égale à  $-4\pi\varphi'_0$  lorsque le point  $o$  est infiniment voisin de la *seconde* région; cela étant, il suffit de faire usage de l'égalité (12) pour obtenir pour toute la surface les égalités (31).

Mais le théorème que nous avons démontré conduit à une autre conséquence : supposons le point  $o$  situé n'importe où dans un milieu transparent. Si la ligne qui joint les points  $i$  et  $o$  ne rencontre pas le corps noir, nous aurons  $\varphi_0 = \varphi'_0$ . Si, au contraire, cette ligne rencontre le corps noir deux ou plusieurs fois, nous aurons  $\varphi_0 = 0$ . Remarquons maintenant que nous pouvons regarder  $\varphi_0$  comme représentant l'une quelconque des composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  du déplacement du point  $o$ , et nous pourrions énoncer de la manière suivante la proposition que nous venons de démontrer : dans le premier des deux cas que nous venons d'indiquer, le mouvement lumineux au point  $o$  est le même que si le corps noir n'existait pas; dans le second cas, le point  $o$  se trouve dans une complète obscurité. Cette proposition nous montre que le corps noir porte une *ombre*, que la lumière se propage *rectilignement* en *rayons* que l'on peut regarder comme indépendants les uns des autres.

5. Dans le numéro précédent, nous avons fait usage d'un théorème énoncé au commencement du n° 3. En énonçant ce théorème, nous avons indiqué certaines conditions sans lesquelles il n'est plus exact. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, les conséquences que nous venons de déduire du théorème ne sont plus vraies. Alors se produisent des *phénomènes de diffraction*.

Concevons un point lumineux  $i$  entouré par un écran complètement noir percé d'une ouverture. Nous appellerons *bord* de l'ouverture la ligne de contact de la surface du corps qui forme l'écran avec un cône issu du point  $i$  et circonscrit à cette surface. Cette ligne partage la surface de l'écran en deux régions, une région intérieure et une région extérieure.

Désignons par  $s$  une surface limitée au bord de l'ouverture et formant, soit avec la surface interne de l'écran, soit avec la surface externe, une surface fermée qui entoure le point lumineux.

Supposons que le point  $o$  occupe une position quelconque extérieure à ces deux surfaces fermées. Alors, en vertu de l'équation (12), des hypothèses relatives aux corps noirs, des équations (32) et (33), enfin en vertu de l'équation (10), nous aurons

$$(34) \quad 4\pi\varphi_0 = \int \Omega ds,$$

en entendant que, pour former la fonction  $\Omega$  qui figure dans cette égalité, on remplacera  $\varphi$  par  $\varphi'$ . L'intégration s'étend à la surface  $s$ .

Les phénomènes de diffraction ne peuvent se présenter que dans les deux cas suivants : ou bien la quantité  $r_1 + r_0$  est constante à un infiniment petit près pour une portion finie de la surface  $s$  ou de son contour, ou bien la ligne droite qui joint les points 1 et  $o$  passe infiniment près du contour de la surface  $s$ .

Fresnel a observé les phénomènes qui se produisent aux divers points de l'axe d'une ouverture circulaire ou d'un écran circulaire, le point lumineux appartenant lui-même à cet axe. Les deux quantités  $r_1$  et  $r_0$  étaient alors sensiblement constantes pour tous les points du contour, et, par conséquent, il en était de même de  $r_1 + r_0$ .

Dans les phénomènes que Fresnel a nommés *phénomènes de diffraction*, par exemple dans les franges qui se produisent près du bord de l'ombre d'un écran, la ligne qui joint les points 1 et  $o$  passe infiniment près du contour de la surface  $s$ .

Fraunhofer a étudié une autre classe de phénomènes de diffraction. Considérons seulement le cas où ces phénomènes sont produits, sans le secours d'aucune lentille, sur un tableau infiniment éloigné au moyen d'un point lumineux infiniment éloigné. Dans ce cas,  $r_1 + r_0$  est sensiblement constant pour tous les points de l'ouverture.

Cherchons quelle est, dans ce cas, la valeur de l'intensité lumineuse au point  $o$ . Dans ce but, posons tout d'abord, conformément à l'égalité (3),

$$(35) \quad \varphi' = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

La quantité  $\Omega$  prend alors la valeur donnée par l'égalité (13). Les deux termes dont se compose cette quantité, grâce à l'infinie petitesse

de  $\lambda$ , ne sont pas du même ordre de grandeur, à moins que la quantité

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}$$

ne soit infiniment petite; il est inutile de considérer ici ce cas particulier.

D'après ce que nous venons de dire, l'équation (34) donne

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\lambda} \int \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) ds.$$

Pour éviter les longueurs, supposons que la surface  $s$  soit plane et que ses dimensions soient assez petites par rapport à  $r_0$  et à  $r_1$  pour que, toutes les fois que  $r_0$  et  $r_1$  ou bien leurs dérivées par rapport à  $N$  figurent autrement que comme argument d'un sinus, on puisse les regarder comme des constantes; supposons, en même temps, que les lignes  $r_0$  forment des angles infiniment petits avec les prolongements des lignes  $r_1$ . Nous aurons alors

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = - \frac{\partial r_1}{\partial N}$$

et

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \int \sin 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) ds.$$

Supposons maintenant que l'on généralise l'expression de  $\varphi'$  par la méthode que nous avons indiquée pour passer de l'égalité (3) à l'égalité (4). Nous aurons alors

$$(36) \quad \varphi' = \frac{D}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{D'}{r_1} \sin 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right),$$

$D$  et  $D'$  étant des quantités qui dépendent de la direction du rayon allant du point lumineux 1 au point de coordonnées  $x, y, z$ . Cette égalité conduira à la suivante

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \left[ D \int \sin 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) ds - D' \int \cos 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) ds \right],$$

$D$  et  $D'$  ayant la même signification que dans l'égalité précédente.

Nous pouvons maintenant supposer que  $\varphi$  désigne l'une quelconque



des composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  du déplacement. Faisons cette supposition, et remplaçons D et D' par A et A' si  $\varphi$  représente  $u$ , par B et B' si  $\varphi$  représente  $v$ , par C et C' si  $\varphi$  représente  $w$ . Dès lors, d'après la définition donnée au n° 1 pour l'unité d'intensité, l'intensité de la lumière en un point de l'ouverture diffringente a pour valeur

$$\frac{1}{2r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Désignons cette intensité par I, et posons

$$c = \int \cos 2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda} ds,$$

$$s = \int \sin 2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda} ds;$$

l'intensité au point o aura pour valeur

$$I \frac{1}{\lambda^2 r_0^2} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} \right)^2 (c^2 + s^2).$$

Un grand nombre de mesures ont montré l'accord de cette formule avec l'expérience (1).

6. L'égalité que nous venons de démontrer suppose essentiellement que les dimensions de l'ouverture diffringente sont très grandes par rapport à la longueur d'onde. Pour obtenir les *spectres de diffraction*, on emploie souvent des réseaux dont les fentes ont seulement une largeur d'un petit nombre de longueurs d'onde. On ne saurait donc regarder comme permise l'application de l'égalité précédente à ces réseaux (2). Cependant, les mesures auxquelles nous devons la connaissance des longueurs d'onde ont montré que l'emploi de cette égalité donnait avec une grande exactitude la *position* des maxima de lumière. Les considérations suivantes montrent comment ce fait peut s'expliquer au moyen des hypothèses fondamentales qui ont été admises par nous.

(1) Voir FRÖHLICH, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, Band VI, p. 429.

(2) Voir FRÖHLICH, *Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, Band VI, p. 430, et Band XV, p. 592.

Considérons un réseau sur la nature duquel il nous est inutile de faire aucune hypothèse; ce pourra être un réseau de fils ou un réseau tracé sur noir de fumée, ou encore un réseau à traits de diamant. Supposons que ce réseau soit placé dans l'ouverture d'un écran plan formé par un corps complètement noir. Supposons que cet écran s'étende indéfiniment dans tous les sens. Désignons par  $ds$  un élément du plan du réseau ou, pour parler d'une manière plus précise, un élément d'un plan infiniment voisin du réseau et situé du côté du réseau où se trouve le point  $o$ . Nous pouvons alors faire usage de l'égalité (9). Si l'on suppose que  $r_0$  soit infiniment grand, cette égalité se simplifie et devient

$$4\pi\varphi_0(t) = - \int \frac{1}{r_0} \left[ f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{a} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(t - \frac{r_0}{a}\right) \right] ds.$$

Prenons le plan auquel appartient l'élément  $ds$  pour plan des  $xy$  du système de coordonnées. Supposons que l'axe des  $x$  soit perpendiculaire aux traits du réseau et que l'origine soit au centre du réseau supposé rectangulaire. Soit  $\rho_0$  la distance de l'origine au point  $o$ . Soient  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  les cosinus des angles que la droite menée de l'origine au point  $o$  fait avec les axes coordonnés. Nous aurons

$$r_0 = \rho_0 - \alpha_0 x - \beta_0 y,$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = \gamma_0 \quad \text{et} \quad ds = dx dy.$$

On a ensuite

$$\varphi(t) = A \cos 2\pi \frac{t}{T} + A' \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$f(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial N} = B' \cos 2\pi \frac{t}{T} + B \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi A'}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi A}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

égalités dans lesquelles  $A, A', B, B'$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ . En reportant ces valeurs dans l'expression de  $\varphi_0$  et en choisissant convenablement l'origine des temps, on trouve

$$\varphi_0 = \iint \left[ C \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda} \right) + C' \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda} \right) \right] dx dy.$$

Les quantités  $C$  et  $C'$  sont inversement proportionnelles à  $\rho_0$ ; ce sont des fonctions linéaires de  $\gamma_0$ . Enfin, circonstance fort importante à remarquer, ce sont des fonctions linéaires et homogènes de  $A$ ,  $A'$  et  $B$ ,  $B'$ , à coefficients indépendants de  $x$  et de  $\gamma$ .

Supposons maintenant que la source de lumière soit un point lumineux rejeté à l'infini dans la direction de l'axe des  $z$  négatifs. Désignons par  $2b$  la longueur des traits, par  $2n$  leur nombre et par  $e$  la distance de deux points correspondants de deux traits consécutifs, la largeur du réseau sera  $2ne$ .

Supposons ensuite que les quantités  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$  et, par conséquent, aussi les quantités  $C$  et  $C'$  soient liées à  $\gamma$  de telle façon qu'elles demeurent constantes, tandis que  $\gamma$  varie de  $-b$  à  $+b$  et qu'elles s'annulent lorsque  $\gamma$  prend des valeurs situées en dehors de cet intervalle; supposons qu'elles soient liées à  $x$  de telle façon que,  $x$  variant de  $-ne$  à  $+ne$ , ces quantités soient des fonctions périodiques de  $x$  ayant pour période  $e$ , et qu'elles s'annulent pour les autres valeurs de  $x$ . Par suite de ces hypothèses, nous aurons tout d'abord

$$\varphi_0 = \frac{\sin 2\pi \frac{\beta b_0}{\lambda}}{\frac{\beta_0 \pi}{\lambda}} \int_{-ne}^{ne} \left[ C \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda} \right) + C' \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda} \right) \right] dx;$$

$\lambda$  étant infiniment petit par rapport à  $b$ , le facteur qui précède le signe d'intégration sera infiniment petit par rapport à  $b$  si  $\beta_0$  a une valeur finie. Il aura, au contraire, une valeur finie si  $\beta_0$  est un infiniment petit de l'ordre de  $\frac{\lambda}{b}$ .

Sous le signe d'intégration, supposons que nous développions  $C$  et  $C'$  suivant les sinus et cosinus des multiples de  $\frac{2\pi x}{e}$ . Nous aurons alors, en désignant par  $h$  un nombre entier ou nul, à considérer les intégrales de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \cos h \frac{2\pi x}{e} \sin \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx$$

et de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \sin h \frac{2\pi x}{e} \cos \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx,$$

qui sont égales à 0, et les intégrales de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \cos h \frac{2\pi x}{e} \cos \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx$$

et de la forme

$$\int_{-ne}^{ne} \sin h \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi \alpha_0 x}{\lambda} dx,$$

qui ont respectivement pour valeur

$$\frac{\sin 2\pi ne \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)} + \frac{\sin 2\pi ne \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}$$

et

$$\frac{\sin 2\pi ne \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)} - \frac{\sin 2\pi ne \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}{2\pi \left( \frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)}.$$

Ces expressions sont en général infiniment petites par rapport à  $ne$ , si l'on regarde  $\lambda$  comme infiniment petit par rapport à  $ne$ ; mais elles deviennent finies dans le cas où

$$\alpha_0 \pm h \frac{\lambda}{e}$$

est une quantité infiniment petite de l'ordre de  $\frac{\lambda}{ne}$ .

On peut supposer que la quantité  $\varphi$  désigne l'une quelconque des composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  du déplacement du point 0. On voit alors que, pour

$$\alpha_0 = \pm h \frac{\lambda}{e}, \quad \beta_0 = 0,$$

l'intensité de la lumière aura une valeur infiniment grande par rapport à l'intensité de la lumière reçue en tout autre point du champ. C'est précisément ce que l'expérience a montré.

7. Les considérations que nous avons exposées permettent bien aisément de démontrer la loi de la *réflexion* des rayons lumineux. Opposons un corps quelconque au point lumineux 1. Pour simplifier, supposons

que la surface de ce corps soit recouverte par une couche d'une substance noire laissant seulement une petite ouverture en regard du point lumineux. Supposons, en outre, que l'on ait choisi la forme géométrique du corps de telle sorte que le rayon réfléchi, tel que le fournit l'expérience, ne rencontre pas une seconde fois la surface du corps. Supposons enfin, comme dans ce qui précède, que la quantité  $\varphi'$  se rapporte au mouvement qui existerait dans le milieu si le corps étranger ne s'y trouvait pas.

Commençons par admettre que la quantité  $\varphi'$  soit représentée par l'équation (35). On satisfera alors aux conditions à remplir en posant :

1° Pour la partie de la surface du corps qui est mise à nu,

$$\varphi_i = \varphi', \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N'}$$

et, par conséquent, d'après l'égalité (30),

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \frac{c}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t + \gamma}{T} \right), \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} &= -c \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t + \gamma}{T} \right), \end{aligned}$$

égalités d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' + \frac{c}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t + \gamma}{T} \right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial N} &= \frac{\partial \varphi'}{\partial N} - c \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t + \gamma}{T} \right); \end{aligned}$$

2° Pour tous les points de la surface noircie en lesquels celle-ci est rencontrée pour la première fois par une ligne issue du point 1,

$$\varphi = \varphi', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N};$$

3° Enfin, pour tous les autres points de la surface noircie,

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

D'après les égalités (11) et (12), la quantité dont la valeur de  $\varphi_0$  dans le cas actuel surpasse la valeur que prendrait la même quantité  $\varphi_0$

si la surface *tout entière* du corps étranger était noircie est la somme des deux intégrales

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{c}{r_1 r_0} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \cos 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) ds$$

et

$$(37) \quad -\frac{1}{2\lambda} \int \frac{c}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin 2\pi \left( \frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t + \gamma}{T} \right) ds.$$

L'intégration s'étend à la portion de surface mise à nu, portion que nous appellerons la surface  $s^{(1)}$ ;  $\lambda$  étant infiniment petit, si l'on suppose le point  $o$  situé à une distance finie de la surface, on pourra négliger la première intégrale devant la seconde. La différence qui existe entre les deux valeurs de  $\varphi_0$  est donc représentée par l'intégrale (37).

Il en est encore de même si  $\varphi'$ , au lieu d'être représenté par l'égalité (35), est représenté par l'égalité (36); seules, les valeurs de  $c$  et de  $\gamma$  sont différentes. L'intégrale (37) a la forme de l'intégrale (19). Les raisonnements relatifs à cette dernière intégrale montrent que l'intégrale (37) s'annule en général. L'intégrale (19) ne s'annule pas lorsque la surface  $s$  est traversée par la ligne qui joint les points 1 et 0; mais l'intégrale (37) s'annule encore dans ce cas; car, au point de rencontre de la ligne et de la surface, on a

$$\frac{\partial r}{\partial N} + \frac{\partial r_1}{\partial N} = 0.$$

L'intégrale (37) ne peut donc différer de 0 que s'il existe sur la surface  $s$  un point tel que les lignes joignant ce point au point  $o$  et au point 1 soient dans un même plan avec la normale à la surface en ce point, et fassent avec cette normale des angles égaux. Ceci démontre l'existence des rayons réfléchis et donne leur direction; toutefois, la loi de la réflexion sera troublée par des phénomènes de diffraction si la quantité  $r_1 + r_0$  est constante à un infiniment petit près pour une por-

---

(1) Il serait facile de démontrer que, si le point  $o$  est situé sur la surface ou dans son voisinage, cette expression redonne bien les valeurs de  $\varphi$  et de  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  que nous avons admises. Toutefois, nous passerons cette démonstration sous silence.

tion finie de la surface  $s$  ou de son contour, ou bien encore si le point  $o$  se trouve au voisinage immédiat de la surface qui limite le faisceau de rayons réfléchis.

La loi que nous venons de démontrer détermine les directions des rayons réfléchis. On peut en déduire les propriétés géométriques d'un faisceau de rayons émis par un point lumineux et réfléchis sur une surface courbe; mais, en outre, les calculs exposés au n° 3 permettent de reconnaître comment l'intensité et la phase du mouvement lumineux varient d'un point à un autre le long d'un rayon d'un semblable faisceau.

La partie de la quantité  $\varphi_0$  qui correspond à la lumière réfléchie, c'est-à-dire l'expression (37), est donnée par l'une des égalités (24), (25) ou (26), pourvu que l'on pose dans ces expressions

$$G = \frac{K}{\rho_0},$$

$K$  désignant une quantité indépendante de  $\rho_0$ . Il résulte de là que, le long d'un rayon réfléchi, l'intensité varie avec  $\rho_0$  de manière à rester inversement proportionnelle à la valeur absolue de

$$\rho_0^2 \mu_1 \mu_2.$$

D'après les égalités (27) et (22), cette dernière expression peut s'écrire

$$(b_{11}\rho_0 + c_{11})(b_{22}\rho_0 + c_{22}) - (b_{12}\rho_0 + c_{12})^2,$$

les quantités  $b$  et  $c$  étant indépendantes de  $\rho_0$ , et les quantités  $c$  vérifiant les égalités

$$c_{11} = \frac{1}{2}(1 - \alpha_0^2),$$

$$c_{12} = -\frac{1}{2}\alpha_0\beta_0,$$

$$c_{22} = \frac{1}{2}(1 - \beta_0^2).$$

En égalant l'expression précédente à zéro, on obtient une équation du second degré en  $\rho_0$  dont les racines sont toujours réelles. Nous les désignerons par  $f_1$  et  $f_2$ . L'intensité est alors inversement proportionnelle à la valeur absolue de

$$(\rho_0 - f_1)(\rho_0 - f_2).$$

L'intensité est infinie aux points  $\rho_0 = f_1$  et  $\rho_0 = f_2$ . Ces deux points sont les foyers du rayon.

Quant à ce qui concerne la phase, il faut remarquer que, d'après les expressions (24), (25) et (26), cette phase varie brusquement de  $\frac{\pi}{2}$  au moment où le point  $o$  traverse l'un des foyers.

Il est à peine nécessaire d'observer que la réfraction de la lumière peut donner lieu à une étude analogue à celle que nous avons faite sur la réflexion.





---

SUR LE

# CHANGEMENT DE VARIABLES

(SUITE),

PAR M. E. MARCHAND,  
PROFESSEUR AU LYCÉE DE CARCASSONNE.

---

## CHAPITRE III.

35. La formule générale relative au changement de la variable indépendante s'est présentée comme application immédiate de la série de Taylor.

Cauchy, par ses célèbres Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, a montré que cette série découlait naturellement des deux formules

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) dz}{z-x}, \quad \frac{f^{(n)}(x)}{1.2 \dots n} = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Il est certain que ces intégrales remarquables contiennent tous les résultats qui précèdent. Je l'établirai d'abord rapidement (première Partie) en retrouvant les formules qui ont servi de point de départ.

Il y a plus. Toute formule de Calcul intégral est susceptible de nombreuses transformations dont il faut savoir profiter. C'est ce que j'ai surtout essayé de faire dans ce Chapitre en me plaçant successivement à deux points de vue différents, l'un général (deuxième Partie), l'autre plus particulier (troisième Partie).

Comme il ne s'agit ici que de ces intégrales prises le long d'un contour C, auxquelles on n'ose pas d'ordinaire appliquer couramment les méthodes classiques de l'Analyse, je me suis cru autorisé à donner au calcul tout le développement qu'il comporte.

## PREMIÈRE PARTIE.

36.

$$y = f(x), \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{1.2 \dots n}{2\pi i} \int_C \frac{f(x) dx}{(x - x_0)^{n+1}}.$$

Or, remarquant que l'intégration par parties donne

$$\int_C \frac{f(x) dx}{(x - x_0)^{n+1}} = - \left[ \frac{1}{n} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \right]_C + \frac{1}{n} \int_C \frac{df(x)}{(x - x_0)^n},$$

on voit que  $\left[ \frac{1}{n} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \right]_C \equiv 0$  et qu'on peut écrire

$$(k) \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{dy}{(x - x_0)^n}.$$

Or on sait que, lorsqu'il ne s'agit comme ici que de différentielles premières  $dy$ , le choix de la variable indépendante n'influe pas sur la forme du résultat. Je puis imaginer  $y$  exprimé en fonction de  $u$ ,  $u$  étant une fonction de  $x$ ,

$$y = y_0 + \frac{u - u_0}{1} \left( \frac{dy}{du} \right)_0 + \frac{(u - u_0)^2}{1.2} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \right)_0 + \dots + R_{n+1}.$$

Remarquant que  $\left( \frac{dy}{du} \right)_0, \left( \frac{d^2 y}{du^2} \right)_0, \dots$  sont des constantes et désignant ces constantes par  $y', y'', \dots$ , il vient

$$dy = y' \frac{d(u - u_0)}{1} + y'' \frac{d(u - u_0)^2}{1.2} + \dots + dR_{n+1}.$$

On a l'intégrale

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{y' \frac{d(u - u_0)}{1} + y'' \frac{d(u - u_0)^2}{1.2} + \dots + dR_{n+1}}{(x - x_0)^n}.$$

Rien n'empêche de considérer  $u$  comme une fonction de  $x$  et de chercher le résidu dans cette hypothèse. Le multiplicateur de  $y^{(p)}$  sera, à part le facteur numérique  $1.2 \dots (n-1)$ , dont je ne m'occupe pas pour l'instant, le coefficient de  $(x - x_0)^{n-1}$  dans le développement par la formule de Taylor de  $\frac{d(u - u_0)^p}{1.2 \dots p}$ . Ce développement est, en

remarquant que, pour  $x = x_0$ , on a

$$u = u_0,$$

ce qu'on indique par la notation  $(u - u_0)$

$$\begin{aligned} \frac{d(u - u_0)^p}{1.2 \dots p} &= \frac{1}{1.2 \dots p} d \left\{ (u - u_0)^p + \frac{x - x_0}{1} [(u - u_0)^p]^{(1)} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{1.2 \dots p} d \left\{ \frac{(x - x_0)^p}{1.2 \dots p} [(u - u_0)^p]^{(p)} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

d'après le lemme du n° 3. Ici encore, il faut tenir compte de ce que  $[(u - u_0)^p]^{(p)}$  doit être considéré comme coefficient constant,

$$\frac{d(u - u_0)^p}{1.2 \dots p} = \frac{1}{1.2 \dots p} \left\{ [(u - u_0)^p]^{(p)} \frac{d(x - x_0)^p}{1.2 \dots p} + \dots \right\}.$$

Le coefficient de  $(x - x_0)^{n-1}$ , c'est-à-dire le résidu, sera

$$\frac{1}{1.2 \dots p} \frac{1}{1.2 \dots (n-1)} [(u - u_0)^p]^{(n)}.$$

Nous retrouvons la formule du début

$$(A) \quad \frac{d^n \gamma}{dx^n} = (u - u_0)^{(n)} \frac{d\gamma}{du} + \frac{[(u - u_0)^2]^{(n)}}{1.2} \frac{d^2 \gamma}{du^2} + \dots$$

37. Dans le cas de deux variables indépendantes, on a

$$\frac{d^n z}{dx^\alpha dy^\beta} = \frac{1.2 \dots \alpha.1.2 \dots \beta}{-4\pi^2} \int_C \int_C \frac{z dx dy}{(x - x_0)^{\alpha+1} (y - y_0)^{\beta+1}}.$$

Imaginons d'abord  $z$  exprimé en  $u$  et  $v$

$$z = z_0 + \frac{u - u_0}{1} \left( \frac{dz}{du} \right)_0 + \frac{v - v_0}{1} \left( \frac{dz}{dv} \right)_0 + \dots$$

Ici  $\frac{dz}{du}$ ,  $\frac{dz}{dv}$ , ... sont des nombres;  $u$  et  $v$  peuvent être considérés comme des fonctions de  $x$  et  $y$

$$\begin{aligned} &\frac{(u - u_0)^\lambda}{1.2 \dots \lambda} \frac{(v - v_0)^\mu}{1.2 \dots \mu} \\ &= \frac{1}{1.2 \dots \lambda} \frac{1}{1.2 \dots \mu} \sum \frac{1}{1.2 \dots \alpha} \frac{1}{1.2 \dots \beta} [(u - u_0)^\lambda (v - v_0)^\mu]_{x^\alpha y^\beta}^{(n)} (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta. \end{aligned}$$

Le long des deux contours fermés C et C' ce terme donnera simplement

$$-4\pi^2 \frac{1}{1.2\dots\lambda} \frac{1}{1.2\dots\mu} \frac{1}{1.2\dots\alpha} \frac{1}{1.2\dots\beta} [(u-u_0)^\lambda (v-v_0)^\mu]_{x^\alpha y^\beta}^{(n)}.$$

On a donc, en simplifiant et rétablissant  $\frac{d^{\lambda+\mu} z}{du^\lambda dv^\mu}$ ,

$$(A) \quad \frac{d^n z}{dx^\alpha dx^\beta} = \sum \frac{1}{1.2\dots\lambda} \frac{1}{1.2\dots\mu} [(u-u_0)^\lambda (v-v_0)^\mu]_{x^\alpha y^\beta}^{(n)} \frac{d^{\lambda+\mu} z}{du^\lambda dv^\mu}.$$

## DEUXIÈME PARTIE.

38. Je viens de rappeler que, si l'on prend les notations habituelles  $x, y, y=f(x)$ , on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\dots(n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} dx.$$

ou, en employant l'intégration par parties,

$$\int_C \frac{f(x) dx}{(x-x_0)^{n+1}} = -\frac{1}{n} \left[ \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \right]_C + \frac{1}{n} \int_C \frac{df(x)}{(x-x_0)^n}.$$

D'après une remarque déjà faite, si  $f(x)$  est holomorphe à l'intérieur du contour C,

$$\left[ \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \right]_C = 0;$$

d'autre part, on sait que, même si  $x$  n'est pas variable indépendante,

$$f'(x) dx \equiv df(x) \equiv f'_u du.$$

On a donc, pour le changement de variable

$$x = \varphi(u), \quad x_0 = \varphi(\alpha),$$

la formule

$$(K) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\dots(n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{f'(u) du}{[\varphi(u) - \varphi(\alpha)]^n}.$$

Posant

$$u - \alpha = h; \quad \text{d'où} \quad du = dh,$$

on a à effectuer

$$\int_C \left[ f'(\alpha) + \frac{h}{1} f''(\alpha) + \dots + h^{n+1} R \right] \left[ h \varphi'(\alpha) + \frac{h^2}{1.2} \varphi''(\alpha) + \dots \right]^{-n} dh.$$

Reprenant les notations habituelles,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_C \left( y' + \frac{h}{1} y'' + \dots \right) \left( h x' + \frac{h^2}{1.2} x'' + \dots \right)^{-n} dh.$$

Le contour C étant fermé, il suffira de calculer le coefficient A de  $h^{-1}$  et d'écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1.2 \dots (n-1) A.$$

39. *Première méthode.* — On peut essayer de calculer directement A. En multipliant par  $h^n$  la quantité sous le signe  $\int$ , on peut écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1.2 \dots (n-1) \left( y' + \frac{h}{1} y'' + \dots \right) \left( x' + \frac{h}{1.2} x'' + \dots \right)^{-n},$$

à condition de ne prendre dans le second membre que le coefficient du terme en  $h^{n-1}$ .

*Exemple 1 :*

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 1.2 \left( y' + \frac{h}{1} y'' + \frac{h^2}{1.2} y''' \dots \right) \left( x' + \frac{h}{1.2} x'' + \frac{h^2}{1.2.3} x''' \dots \right)^{-3}.$$

Puisqu'il faut calculer le terme en  $h^2$ , il suffit de se borner dans chaque parenthèse aux termes en  $h^2$ . Réduisant

$$\begin{aligned} 1.2 \frac{y'''}{1.2} x'^{-3}, & \quad y''' \frac{x'^2}{x'^5}, \\ 1.2 \frac{y''}{1} \left( -\frac{3}{1} x'^{-4} \frac{x''}{1.2} \right), & \quad -y'' \frac{3x'x''}{x'^5}, \\ 1.2 y' \left( -\frac{3}{1.2.3} x'^{-5} x''' + \frac{3.4}{1.2} x'^{-4} \frac{x''^2}{4} \right), & \quad y' \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \end{aligned}$$

on obtient la formule connue

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') + 3x''(y'x'' - x'y'')}{x'^5}.$$

*Exemple II :*

$$x = u^2, \quad x' + \frac{h}{1.2} x'' + \dots = 2u + h.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= 1.2 \dots (n-1) \left( y' + \frac{h}{1} y'' \dots \right) (2u + h)^{-n} \\ &= 1.2 \dots (n-1) \left( y' + \frac{h}{1} y'' \dots \right) \left[ (2u)^{-n} - \frac{n}{1} (2u)^{-n-1} h \dots \right], \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots (p-1)} \frac{n(n+1) \dots (2n-p-1)}{1.2 \dots (n-p)} (2u)^{-(2n-p)} y^{(p)}. \end{aligned}$$

Le coefficient est sous forme de produit de facteurs.

*Expression générale des coefficients.* — Je rappellerai les résultats suivants :

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad (a+x)^{-p} &= a^{-p} - \frac{p}{1} a^{-p-1} x + \dots \\ &+ (-1)^{\alpha} \frac{p(p+1) \dots (p+\alpha-1)}{1.2 \dots \alpha} a^{-p-\alpha} x^{\alpha} + \dots, \\ (a+x)^{-p} &= \sum (-1)^{\alpha} \frac{P_{p+\alpha-1}}{P_{\alpha} P_{p-1}} a^{-p-\alpha} x^{\alpha}, \end{aligned}$$

$x < a$ ;  $\alpha$  étant un entier positif pouvant s'annuler,

$$x^0 = 1, \quad P_0 = 1;$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad (a+b+\dots+l)^{-p} &= \sum (-1)^{\alpha} \frac{P_{p+\alpha-1}}{P_{\alpha} P_{p-1}} a^{-p-\alpha} (b+c+\dots+l)^{\alpha} \\ &= \sum (-1)^{\alpha} \frac{P_{p+\alpha-1}}{P_{p-1} P_{\beta} \dots P_{\lambda}} a^{-p-\alpha} b^{\beta} \dots l^{\lambda}, \\ &\quad \beta + \gamma + \dots + \lambda = \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{\circ} \quad \left( a_1 + \frac{h}{1.2} a_2 + \frac{h^2}{1.2.3} a_3 + \dots \right)^{-p} \\ = \sum (-1)^{\alpha} \frac{P_{p-1+\alpha}}{P_{p-1} P_{\beta} \dots P_{\lambda}} \frac{1}{a_1^{p+\alpha}} \frac{a_2^{\beta} \dots a_k^{\lambda}}{P_2^{\beta} \dots P_k^{\lambda}} h^{\beta+2\gamma+\dots+(k-1)\lambda}, \\ \beta + \gamma + \dots + \lambda = \alpha. \end{aligned}$$

Si l'on veut avoir seulement le coefficient de  $h^{n-1}$ , il faudra donner

à  $\beta, \gamma, \dots, \lambda$  des valeurs telles que

$$\beta + 2\gamma + \dots + (k-1)\lambda = n-1,$$

et, pour chaque valeur de  $\alpha$  qu'on en déduit par

$$\alpha = \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

calculer

$$(-1)^\alpha \frac{P_{p-1+\alpha}}{P_{p-1} P_\beta \dots P_\lambda} \frac{1}{P_1^\beta \dots P_k^\lambda}.$$

On arrive à cette règle

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A_1 y' + \frac{A_2}{1} y'' + \frac{A_3}{1.2} y''' + \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots (n-1)} y^{(n)},$$

$$A_p = \sum (-1)^\alpha \frac{P_{n+\alpha-1}}{P_\beta \dots P_\lambda P_1^\beta \dots P_k^\lambda} \frac{(x')^\beta \dots (x^{(k)})^\lambda}{(x')^{n+\alpha}},$$

$\alpha, \beta, \dots, \lambda$  étant des entiers positifs tels que

$$\beta + 2\gamma + \dots + (k-1)\lambda = n-p,$$

$$\beta + \gamma + \dots + \lambda = \alpha.$$

On déterminera d'abord les systèmes de valeurs de  $\beta, \gamma, \dots, \lambda$  satisfaisant à la première équation; on en déduira  $\alpha$  et, par suite, le coefficient de  $A_p$ .

40. *Deuxième méthode.* — En posant

$$F(h) = \left( y' + \frac{h}{1} y'' \dots \right) \left( h x' + \frac{h^2}{1.2} x'' \dots \right)^{-n},$$

on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_C F(h) dh = 1.2 \dots (n-1) A,$$

$A$  étant le résidu par rapport à  $h$  de  $F(h)$ . Or on sait que

$$F(h) = \frac{A_n}{h^n} + \dots + \frac{A}{h} + \varphi(h),$$

$$h_n F(h) = A_n + A_{n-1} h + \dots + A h^{n-1} + h^n \varphi(h).$$

Il devient évident que

$$(H) \quad 1.2 \dots (n-1)A = \left\{ \frac{d^{n-1}[h^n F(h)]}{dh^{n-1}} \right\}_{h=0}.$$

On peut écrire ainsi cette formule, déjà signalée (19),

$$\frac{d^n \gamma}{dx^n} = \left\{ \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \left[ \left( \gamma' + \frac{h}{1} \gamma'' \dots \right) \left( x' + \frac{h}{1.2} x'' \dots \right)^{-n} \right] \right\}_{h=0}.$$

Pour développer le calcul, je poserai

$$u = \gamma' + \frac{h}{1} \gamma'' + \dots, \quad v = x' + \frac{h}{1.2} x'' + \dots, \quad V = v^{-n}.$$

On a

$$\frac{d^{n-1}(uV)}{dh^{n-1}} = u \frac{d^{n-1}V}{dh^{n-1}} + \frac{n-1}{1} \frac{du}{dh} \frac{d^{n-2}V}{dh^{n-2}} + \dots + V \frac{d^{n-1}u}{dh^{n-1}}.$$

Mais ici on a

$$V = f(v), \quad v = \varphi(h);$$

donc

$$\frac{d^p V}{dh^p} = (\dot{v})^{(p)} \frac{dV}{dv} + \frac{1}{1.2} (\dot{v}^2)^{(p)} \frac{d^2 V}{dv^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots p} (\dot{v}^p)^{(p)} \frac{d^p V}{dv^p}.$$

Comme il faut faire  $h=0$  dans le résultat, les quantités  $\left( \frac{d^i V}{dv^i} \right)_{h=0}$  se calculent sans peine

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2 \dots i} \left( \frac{d^i V}{dv^i} \right)_{h=0} &= (-1)^i \frac{n(n+1) \dots (n+i-1)}{1.2 \dots i} (v^{-n-i})_{h=0} \\ &= (-1)^i \frac{n(n+1) \dots (n+i-1)}{1.2 \dots i} \frac{1}{x'^{n+i}}. \end{aligned}$$

D'autre part,  $(\dot{v}^q)^{(p)}$  étant la dérivée d'ordre  $p$  d'un produit de  $q$  facteurs

$$(\dot{v}^q)^{(p)} = \sum \frac{1.2 \dots p}{1.2 \dots \alpha \dots 1.2 \dots \beta \dots 1.2 \dots \lambda} (\dot{v}^{(\alpha)} \dot{v}^{(\beta)} \dots \dot{v}^{(\lambda)})_{h=0}.$$

Or on sait que

$$(\dot{v}^{(\alpha)})_{h=0} = \frac{x'^{(\alpha+1)}}{\alpha+1};$$

donc on a

$$(\dot{v}^q)^{(p)} = \sum \frac{1.2 \dots p}{1.2 \dots \alpha \dots 1.2 \dots \lambda} \frac{x'^{(\alpha+1)} \dots x'^{(\lambda+1)}}{(\alpha+1) \dots (\lambda+1)},$$

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = p.$$



D'ailleurs, par suite de l'hypothèse

$$\nu^{(0)} = \dot{\nu} \equiv 0,$$

$\alpha, \beta, \dots, \lambda$  sont  $q$  entiers positifs non nuls.

En résumé, nous arrivons à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y' V_{n-1} + \frac{n-1}{1} y'' V_{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1, 2} y''' V_{n-3} + \dots + y^{(n)} V,$$

$$V_p = -n \frac{(\dot{\nu})^{(p)}}{x'^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{1, 2} \frac{(\dot{\nu}^2)^{(p)}}{x'^{n+2}} - \dots \\ + (-1)^p \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{1, 2 \dots p} \frac{(\dot{\nu}^p)^{(p)}}{x'^{n+p}},$$

$$V_0 = V = \frac{1}{x'^n},$$

$$(\nu^q)^{(p)} = \sum \frac{P_p}{P_{\alpha+1} \dots P_{\lambda+1}} x^{(\alpha+1)} \dots x^{(\lambda+1)}, \\ \alpha + \beta + \dots + \lambda = p,$$

$\alpha, \beta, \dots, \lambda$  étant  $q$  entiers positifs non nuls.

Le calcul de  $V_p$  peut être présenté ainsi

$$V_p = -\frac{n}{1} \frac{(\dot{\nu})^{(p)}}{x'^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{1, 2} \frac{(\dot{\nu}^2)^{(p)}}{x'^{n+2}} + \dots \\ + (-1)^p \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{1, 2 \dots p} \frac{(\dot{\nu}^p)^{(p)}}{x'^{n+p}}.$$

Or  $(\dot{\nu})^{(p)}$  contient un seul facteur  $\nu^{(p)}$ ;  $(\dot{\nu}^2)^{(p)}$  contient deux facteurs  $\nu^{(\alpha)}$  dans chacun de ses termes;  $(\dot{\nu}^3)^{(p)}$  en contient 3, .... Si alors on forme

$$(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_q)^p,$$

qu'on multiplie les termes qui ne contiennent qu'un facteur par  $-\frac{n}{x'^{n+1}}$ , ceux qui en contiennent deux par  $\frac{n(n+1)}{1, 2} \frac{1}{x'^{n+2}}$ , ..., et qu'on remplace  $\nu^{(\alpha)}$  par  $\frac{x^{(\alpha+1)}}{\alpha+1}$ , on aura le développement.

On est conduit à la règle suivante :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\gamma_1}{(x')^n} (\gamma_1 + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{n-1})^{n-1}.$$

On développera la puissance  $(n-1)^{\text{ième}}$  et l'on remplacera  $(y_i)^\alpha$  par  $y^{(\alpha)}$ ;  $(v_q)^\alpha$  par  $-\frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)x'}$ . Par cette substitution, tous les termes qui se déduisent les uns des autres par la permutation des indices inférieurs 1, 2, ...,  $n-1$  des quantités  $v$  deviennent identiques; il suffira d'en calculer un seul

$$\frac{P_{n-1}}{P_\alpha \dots P_\lambda} v_1^\alpha \dots v_q,$$

et de multiplier non par leur nombre, mais par le facteur

$$D_n^p = \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{1.2 \dots p},$$

$p$  étant le nombre des facteurs  $v$  différents.

*Exemple :*

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{y_1}{(x')^3} (y_1 + v_1 + v_2)^3.$$

Terme ne contenant ni  $v_1$  ni  $v_2$  :

$$\frac{y_1^3}{(x')^3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{y_1^3}{(x')^3}.$$

Termes contenant un seul facteur  $v$  :

$$2y_1^2 v, \quad y_1 v_1^2, \quad D_3^1 = \frac{3}{1}, \quad \text{d'où} \quad -\frac{3}{x'^4} \left( 2y_1^2 \frac{x''}{2} + y_1^2 \frac{x'''}{3} \right).$$

Terme contenant deux facteurs  $v$  différents :

$$2v_1 v_2 y_1, \quad D_3^2 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2};$$

on a donc

$$\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} 2y_1' \left( \frac{x''}{2} \right)^2 \frac{1}{(x')^5}.$$

On retrouve bien, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{x' (y''' x' - x''' y') + 3x'' (y' x'' - x' y'')}{(x')^5}.$$

L'analogie avec le développement de la puissance d'un polynôme est complètement mise en évidence. On est en droit d'affirmer que le calcul est du même ordre de difficulté.

41. S'il ne s'agissait que de calculer les coefficients numériques de l'expression de  $\frac{d^n y}{dx^n}$  en fonction de  $x', x'', \dots, y', y'', \dots$  ou d'établir la parenté avec la formule du binôme, il n'y aurait plus rien à ajouter. Mais on serait tenté de reprocher à la première méthode d'exiger la résolution des équations

$$\beta + 2\gamma + \dots + (k-1)\lambda = n - p, \quad \alpha = \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

et à la deuxième méthode de forcer à calculer avec les quantités  $v$ , sauf à remplacer ultérieurement  $v$ , par  $\frac{x''}{2}$ ,  $v, v_2$  par  $\frac{x''}{3}, \dots$ , ce qui empêche de faire, dans un exemple particulier, les réductions qui pourraient abréger le calcul.

Il est heureux que, grâce aux nombreuses transformations auxquelles peut se prêter une intégrale, la formule puisse acquérir beaucoup d'expressions distinctes. Je me bornerai à en indiquer une. Je pourrais partir successivement de la première méthode et de la deuxième méthode, ce qui établirait nettement le lien nécessaire qui doit permettre de passer de l'une à l'autre. Je ne transcrirai cependant qu'une seule démonstration, afin de ne pas trop m'attarder dans ces calculs théoriques, et de réserver plus de place aux applications particulières.

42. Dans la première méthode,  $\frac{d^n y}{dx^n}$  se déduit de

$$1.2 \dots (n-1) \left[ y' + \frac{h}{1} y'' + \dots \right] \left[ x' + \frac{h}{1.2} x'' + \dots \right]^{-n}.$$

Le calcul consistera à prendre la puissance  $-n$  d'une série entière.

S'il ne s'agissait que d'une puissance positive quelconque, le résultat s'obtiendrait immédiatement. La série de Taylor, qui a donné

$$x - x_0 = \frac{h}{1} x' + \frac{h^2}{1.2} x'' + \dots,$$

donne aussi

$$(x - x_0)^p = [(x - x_0)^p] + \frac{h}{1} [(x - x_0)^p]^{(1)} + \dots,$$

le point placé au-dessus de  $x - x_0$  signifiant toujours que l'on devra remplacer  $x$  par  $x_0$ .

D'après le lemme du n° 3, ceci se réduit à

$$(x - x_0)^p = \frac{h^p}{1.2 \dots p} [(x - x_0)^p]^{(p)} + \frac{h^{p+1}}{1.2 \dots (p+1)} [(x - x_0)^p]^{(p+1)} + \dots$$

Appliquant une remarque (n° 5) exposée plus haut avec détail, on peut aussi écrire

$$(x - x_0)^p = \frac{h^p}{1.2 \dots p} (\dot{x}^p)^{(p)} + \frac{h^{p+1}}{1.2 \dots (p+1)} (\dot{x}^p)^{(p+1)} + \dots$$

On a donc, pour une puissance positive,

$$h^p \left[ x' + \frac{h}{1.2} x'' + \dots \right]^p = \frac{h^p}{1.2 \dots p} (x^p)^{(p)} + \frac{h^{p+1}}{1.2 \dots (p+1)} (x^p)^{(p+1)} + \dots$$

Or : « Lorsqu'on a formé les puissances entières et positives d'une  
» série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable  $x$ ,  
» on peut en déduire facilement le développement d'une puissance  
» quelconque

$$u = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots$$

» Si l'on désigne par  $B_{m,n}$  le coefficient de  $x^n$  dans le développement  
» de  $u^m$ , on aura

$$\begin{aligned} B_{(m,n)} = & m B_{(1,n)} A_0^{m-1} \left[ 1 - (m-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} - \dots \pm \frac{(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots (n-1)} \right] \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2} B_{(2,n)} A_0^{m-2} \left[ 1 - (m-2) + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} - \dots \pm \frac{(m-2) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots (n-2)} \right] \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} B_{(3,n)} A_0^{m-3} \left[ 1 - (m-3) + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} - \dots \pm \frac{(m-3) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots (n-3)} \right] \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots n} A_0^{m-n} B_{(n,n)} \end{aligned}$$

» ou, en sommant les coefficients placés entre parenthèses,

$$\begin{aligned} B_{(m,n)} = & m B_{(1,n)} A_0^{m-1} \left[ \frac{(2-m)(3-m) \dots (n-m)}{1.2 \dots (n-1)} \right] \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2} B_{(2,n)} A_0^{m-2} \left[ \frac{(3-m)(4-m) \dots (n-m)}{1.2 \dots (n-2)} \right] + \dots \\ & + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots n} A_0^{m-n} B_{(n,n)}. \quad » \end{aligned}$$

(*Traité de Calcul différentiel*, par M. J. Bertrand, n° 332.)

Ici nous avons

$$u = x' + \frac{h}{1.2} x'' \dots, \quad A_\alpha = \frac{x^{(\alpha+1)}}{1.2 \dots (\alpha+1)},$$

$$B_{(-n,p)} = -\frac{n}{1} \frac{B_{(1,p)}}{x'^{n+1}} \frac{(n+2)(n+3) \dots (n+p)}{1.2 \dots (p-1)}$$

$$+ \frac{n(n+1)}{1.2} \frac{B_{(2,p)}}{x'^{n+2}} \frac{(n+3)(n+4) \dots (n+p)}{1.2 \dots (p-2)} - \dots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{1.2 \dots p} \frac{B_{(p,p)}}{x'^{n+p}},$$

$$B_{(q,p)} = \frac{(\dot{x}^q)^{(p+q)}}{1.2 \dots (p+q)}.$$

Remplaçant  $p$  par  $n-p$ , on a, pour le coefficient de  $\frac{y^{(p)}}{1.2 \dots (p-1)}$ , l'expression suivante :

$$1.2 \dots (n-1) \left[ -\frac{n}{1} \frac{(n+2)(n+3) \dots (2n-p)}{1.2 \dots (n-p-1)} \frac{1}{x'^{n+1}} \frac{(\dot{x}^1)^{(n-p+1)}}{1.2 \dots (n-p+1)} \right.$$

$$+ \frac{n(n+1)}{1.2} \frac{(n+3)(n+4) \dots (2n-p)}{1.2 \dots (n-p-2)} \frac{1}{x'^{n+2}} \frac{(\dot{x}^2)^{(n-p+2)}}{1.2 \dots (n-p+2)} - \dots$$

$$\left. + (-1)^{n-p} \frac{n(n+1) \dots (2n-p-1)}{1.2 \dots (n-p)} \frac{1}{x'^{2n-p}} \frac{(\dot{x}^{n-p})^{2(n-p)}}{1.2 \dots 2(n-p)} \right].$$

Je ferai observer en passant que, ayant

$$B_{(m,n)} = m B_{(1,n)} A_0^{m-1} \left[ \frac{\dots}{1.2 \dots (n-1)} \right] + \dots,$$

on n'a pas le droit de faire  $n = 0$  ou  $n = 1$ .

On peut voir directement que

$$B_{(m,0)} = A_0^m, \quad B_{(m,1)} = \frac{m}{1} A_0^{m-1} A_1,$$

et il en résulte que, pour généraliser la formule, il n'y a qu'à adopter les conventions

$$N(n, m) = \frac{(m+1) \dots (m+n)}{1.2 \dots n} = \frac{1.2 \dots (m+n)}{1.2 \dots m.1.2 \dots n},$$

$$N(0, m) = 1 \text{ si } m > 0, \quad N(n, 0) = 1 \text{ si } n > 0.$$

» Si  $m$  ou  $n$  est négatif,  $N(n, m) = 0$ , lors même que l'autre quantité serait nulle (*Algèbre supérieure*, par J.-A. Serret). »

*Remarque.* — Nous avons démontré au début de ce travail qu'on a (nos 4 et 5)

$$(\dot{x}^p)^{(q)} = [(x - x_0)^p]^{(q)} = (x^p)^{(q)} - \frac{P}{1} (x^{p-1})^{(q)} x + \dots$$

On aurait donc une expression algébrique des coefficients du changement de la variable indépendante, qui n'exige plus la résolution d'équations indéterminées

$$\beta + 2\gamma + \dots = n - p, \quad \alpha = \beta + \gamma + \dots$$

### TROISIÈME PARTIE.

43. Du moment que nous avons obtenu la formule

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \varphi(x), \\ \frac{d^n y}{dx^n} = (\dot{u}^1)^{(n)} \frac{dy}{du} + \dots + \frac{(\dot{u}^n)^{(n)}}{1.2\dots n} \frac{d^n y}{du^n}, \end{array} \right.$$

comme conséquence de l'intégrale définie, nous pourrions renvoyer purement et simplement aux applications faites dans les deux premiers Chapitres.

Mais je tiens à bien montrer comment, dans chaque exemple particulier, on peut transformer directement l'intégrale en lui appliquant les méthodes générales que l'on possède actuellement.

On sait qu'il existe des méthodes remarquables pour le cas des fractions rationnelles et pour celui des fractions rationnelles de  $\sin x$  et de  $\cos x$ . Je vais en profiter dans cette troisième Partie.

Je rappelle ce résultat relatif aux fractions rationnelles

$$\begin{aligned} a \int \frac{\mathfrak{K}}{N^{n+1}} dx &= \int \frac{U}{N} dx + \frac{V}{N^n}, \\ BN - N'A &= 1, \\ nV_0 &= A\mathfrak{K} - NK, & \mathfrak{K}_1 &= B\mathfrak{K} - N'K - V'_0, \\ (n-1)V_1 &= A\mathfrak{K}_1 - NK_1, & \mathfrak{K}_2 &= B\mathfrak{K}_1 - N'K_1 - V'_1, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\ V_{n-1} &= A\mathfrak{K}_{n-1} - NK_{n-1}, & \mathfrak{K}_n &= B\mathfrak{K}_{n-1} - N'K_{n-1} - V'_{n-1}, \\ & & U &= \mathfrak{K}_n, \end{aligned}$$

»  $K, K_1, \dots, K_{n-1}$  étant des polynômes complètement arbitraires. »  
(*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Ch. Hermite, p. 267-268).

Si l'on intègre le long d'un contour fermé  $C$ ,  $\left[\frac{V}{N^n}\right]_C$  s'annulera, puisque la fonction  $\frac{V}{N^n}$  est visiblement holomorphe à l'intérieur du contour

$$\int_C \frac{\mathfrak{U}}{N^{n+1}} dx = \int_C \frac{U}{N} dx.$$

Je suppose  $K = K_1 = \dots \equiv 0$  et  $B = \text{const.}$ ; on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_1 &= B \mathfrak{U} - \frac{1}{n} (A \mathfrak{U})', \\ \mathfrak{U}_2 &= B^2 \mathfrak{U} - \frac{B}{n} (A \mathfrak{U})' - \frac{1}{(n-1)} (A \mathfrak{U}_1)' \\ &= B^2 \mathfrak{U} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) B (A \mathfrak{U})' + \frac{1}{n(n-1)} [A (A \mathfrak{U})']',\end{aligned}$$

Supposant démontré que

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_k &= B^k \mathfrak{U} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1}\right) B^{k-1} (A \mathfrak{U})' \\ &\quad + \left[\frac{1}{n(n-1)} + \dots\right] B^{k-2} [A (A \mathfrak{U})']' - \dots,\end{aligned}$$

les coefficients étant la somme des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... de  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-k+1}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{k+1} &= B^{k+1} \mathfrak{U} - \left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-k+1}\right) B^k (A \mathfrak{U})' + \dots - \frac{(A \mathfrak{U}_k)'}{n-k} \\ &= B^{k+1} \mathfrak{U} - \left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-k}\right) B^k (A \mathfrak{U})' + \dots\end{aligned}$$

La loi se trouve démontrée,

$$U = B^n \mathfrak{U} - s_1 B^{n-1} (A \mathfrak{U})' + s_2 B^{n-2} [A (A \mathfrak{U})']' - s_3 B^{n-3} \{A [A (A \mathfrak{U})']'\}' + \dots,$$

$s_1$  étant la somme des inverses des  $n$  premiers nombres,  $s_2$  la somme des produits deux à deux de ces inverses, etc.

D'autre part, remarquant la loi de formation de ces expressions  $(A\mathfrak{K})'$ ,  $[A(A\mathfrak{K})']'$ , ..., on voit que, si l'on posait

$$\mathfrak{K} = y', \quad A = \frac{1}{x'},$$

on aurait

$$\begin{aligned} (A\mathfrak{K}) &= \frac{y'}{x'} \equiv \frac{dy}{dx}, & A(A\mathfrak{K})' &= \frac{d^2 y}{dx^2}, \\ A[A(A\mathfrak{K})']' &= \frac{d^3 y}{dx^3}, & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

la variable indépendante étant une quantité quelconque  $u$ . Par suite,

$$\begin{aligned} [A(A\mathfrak{K})']' &= \frac{d}{du} \left[ \frac{d^2 y}{dx^2} \right], \\ \{A[A(A\mathfrak{K})']'\}' &= \frac{d}{du} \left[ \frac{d^3 y}{dx^3} \right]. \end{aligned}$$

Cette loi de formation sera d'ailleurs appliquée dans le second exemple, ce qui la rendra plus nette à l'esprit. Il faut évidemment supposer que, dans chaque exemple où l'on applique cette formule, il ait été possible d'exprimer  $\frac{d^p y}{dx^p}$  en fonction de la variable indépendante  $u$ .

44. *Premier exemple :*

$$x = e^u.$$

On a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{dy}{(e^{u_0+u} - e^{u_0})^n}.$$

On met d'abord en facteur  $\frac{1}{e^{u_0 n}} = \frac{1}{x_0^n}$ , et le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  est

$$\frac{1}{x_0^n} \frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{u^{p-1}}{1.2 \dots (p-1)} \frac{1}{(e^u - 1)^n} du.$$

Bien que  $e^u$  ne soit pas un polynôme entier, il est facile d'appliquer la formule qui vient d'être écrite,

$$N = e^u - 1.$$

De  $BN - N'A = 1$ , on tire

$$B = A = -1.$$



On a

$$\mathcal{G} = u^{p-1},$$

$$(-1)^{n-1} U = u^{p-1} - s_1(u^{p-1})' + s_2(u^{p-1})'' + \dots + (-1)^{p-1} s_{p-1}(u^{p-1})^{(p-1)};$$

le dénominateur de l'intégrale est ramené à

$$\frac{1}{(e^u - 1)} = \frac{1}{\frac{u}{1} + \dots}$$

Tout terme du numérateur qui contiendra  $u$  permettra de diviser le dénominateur et le numérateur par  $u$ ; la quantité sous le signe  $\int$  restant finie, l'intégrale prise le long du contour fermé  $C$  sera nulle. Le résidu sera fourni par le terme

$$(-1)^{p-1} s_{p-1}(u^{p-1})^{(p-1)} = (-1)^{p-1} 1.2 \dots (p-1) s_{p-1};$$

donc

$$(-1)^{n-1} U = (-1)^{p-1} 1.2 \dots (p-1) s_{p-1},$$

$$\int_C \frac{u^{p-1}}{1.2 \dots (p-1)} \frac{1}{(e^u - 1)^n} du = (-1)^{n-1} \int_C \frac{(-1)^{p-1} s_{p-1}}{e^{u-1}} du = 2\pi i (-1)^{n+p} s_{p-1}.$$

On retrouve le résultat déjà obtenu au n° 17. En effet, on a d'abord

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = 1.2 \dots (n-1) \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p} s_{p-1} \frac{d^p y}{du^p}.$$

Or  $s_{p-1}$  étant la somme des produits  $p-1$  à  $p-1$  des inverses des  $(n-1)$  premiers nombres,  $1.2 \dots (n-1) s_{p-1}$  est la somme des produits  $(n-p)$  à  $(n-p)$  de ces  $(n-1)$  premiers nombres. Désignant par  $S_n^p$  la somme des produits  $p$  à  $p$  des  $n$  premiers nombres naturels, on a

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p} S_{n-1}^{n-p} \frac{d^p y}{du^p};$$

c'est-à-dire

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[ \frac{d}{du} - (n-1) \right] \left[ \frac{d}{du} - (n-2) \right] \dots \left( \frac{d}{du} - 1 \right) \frac{dy}{du};$$

mais il faut remarquer que cette formule générale ne donne tous les cas particuliers que si l'on adopte quelques conventions spéciales

simples. Quel que soit  $n$ , si l'on fait  $p = n$ , on est conduit à écrire  $S_{n-1}^0$  et l'on constate directement que ce coefficient est égal à 1.

Il y a plus. Si l'on fait  $n = 0$ , il vient

$$x^0 \frac{d^0 \gamma}{dx^0} = S_{-1}^0 \frac{d^0 \gamma}{du^0};$$

Cette formule sera exacte si l'on prend les définitions suivantes

$$\frac{d^0 \gamma}{dx^0} = \gamma, \quad \frac{d^0 \gamma}{du^0} = \gamma,$$

$$S_{-1}^0 = 1.$$

Ce résultat, qui peut paraître étrange, nous servira plus loin.

45. *Deuxième exemple :*

$$x = u^\mu.$$

On a

$$\frac{d^n \gamma}{dx^n} = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_c \frac{d\gamma}{[(u+u_0)^\mu - u_0^\mu]^n} = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{2\pi i} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{A_p \gamma^{(p)}}{1 \cdot 2 \dots (p-1)},$$

$$A_p = \int_c \frac{u^{p-1} du}{[(u+u_0)^\mu - u_0^\mu]^n}.$$

Cette intégrale se ramènera à une autre de la forme

$$\int_c \frac{U du}{(u+u_0)^\mu - u_0^\mu} = \int_c \frac{U du}{\frac{\mu}{1} u_0^{\mu-1} u (1+\varepsilon)}.$$

Remarquant que  $U$  est un polynôme entier, on aperçoit que le résidu ne peut être produit que par le terme constant de  $U$ . Il s'agit de trouver ce terme constant.

De l'égalité

$$B[(u+u_0)^\mu - u_0^\mu] - A\mu(u+u_0)^{\mu-1} = 1,$$

on tire immédiatement

$$B = -\frac{1}{u_0^\mu}, \quad A = -\frac{u+u_0}{\mu u_0^\mu}.$$

On a vu que

$$U = B^{n-1} \mathfrak{U} - s_1 B^{n-2} (A \mathfrak{U})' + \dots$$

On peut mettre en facteur  $\left(\frac{1}{u_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{x_0^{n-1}}$ , et si l'on fait  $A = u + u_0$ , il vient

$$(-1)^{n-1} x_0^{n-1} U = \mathfrak{X} - \frac{s_1}{\mu} (A \mathfrak{X})' + \frac{s_2}{\mu^2} [A (A \mathfrak{X})'] - \dots$$

D'après une remarque déjà faite, si l'on pose

$$\mathfrak{X} = y', \quad A = \frac{1}{x'},$$

on a

$$[A (A \mathfrak{X})']' = \frac{d}{du} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right), \quad \dots$$

Ici l'on a

$$A = u + u_0 = \frac{1}{x'},$$

$$x = L(u + u_0), \quad u = -u_0 + e^x.$$

Comme d'ailleurs

$$y' = u^{p-1}, \quad y = \frac{u^p}{p},$$

on a

$$y = \frac{(e^x - u_0)^p}{p} = \frac{e^{px}}{p} - \frac{p}{1} u_0 \frac{e^{(p-1)x}}{p} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u_0^2 \frac{e^{(p-2)x}}{p} - \dots,$$

$$\begin{aligned} y_{x^k}^{(k)} &= \frac{1}{p} \left[ p^k e^{px} - \frac{p}{1} (p-1)^k u_0 e^{(p-1)x} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{p} \left[ p^k (u + u_0)^p - \frac{p}{1} (p-1)^k u_0 (u + u_0)^{p-1} + \dots \right], \end{aligned}$$

$$(y_{x^k}^{(k)})'_u = \frac{1}{p} \left[ p^{k+1} (u + u_0)^{p-1} - \frac{p}{1} (p-1)^{k+1} u_0 (u + u_0)^{p-2} + \dots \right].$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} x_0^{n-1} U &= u^{p-1} - \frac{s_1}{\mu} \frac{1}{p} \left[ p^2 (u + u_0)^{p-1} - \frac{p}{1} (p-1)^2 u_0 (u + u_0)^{p-2} \dots \right] \\ &\quad + \frac{s_2}{\mu^2} \frac{1}{p} \left[ p^3 (u + u_0)^{p-1} - \frac{p}{1} (p-1)^3 u_0 (u + u_0)^{p-2} \dots \right] - \dots \end{aligned}$$

Le résidu s'obtient dès lors à simple vue,

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \dots p} \frac{u_0^{p-1}}{x_0^{n-1} \mu u_0^{p-1}} \left\{ -\frac{s_1}{\mu} \left[ p^2 - \frac{p}{1} (p-1)^2 \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_2}{\mu^2} \left[ p^3 - \frac{p}{1} (p-1)^3 \dots \right] \dots \right\} \frac{d^p y}{du^p}. \end{aligned}$$

Combinant avec la parenthèse le coefficient  $(-1)^{n-1} \frac{1.2 \dots (n-1)}{\mu}$  et appelant  $S_1, S_2, \dots$  les sommes des produits  $(n-1)-1$  à  $(n-1)-1$ ,  $(n-1)-2$  à  $(n-1)-2$ , ... des  $(n-1)$  premiers nombres, il vient

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\mu} \left\{ -\frac{S_1}{\mu} \left[ p^2 - \frac{p}{1}(p-1)^2 + \dots \right] + \frac{S_2}{\mu^2} \left[ p^3 - \frac{p}{1}(p-1)^3 + \dots \right] - \dots \right\}.$$

Or, posant  $f(z) = z^2$ , l'accroissement  $\xi$  donné à  $z$  étant 1, les différences étant régressives, on a

$$\Delta^p f(z) = z^2 - \frac{p}{1}(z-1)^2 + \frac{p(p-1)}{1.2}(z-2)^2 - \dots$$

Introduisant, pour rendre la formule plus symétrique, le terme nul  $\frac{S_0}{\mu^0} \Delta^p z$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n-1}}{\mu} \left\{ -\frac{S_1}{\mu} \left[ p^2 - \frac{p}{1}(p-1)^2 \dots \right] \dots \right\}, \\ & \equiv \frac{(-1)^{n-1}}{\mu} \left[ \frac{S_0}{\mu^0} \Delta^p z - \frac{S_1}{\mu^1} \Delta^p z^2 + \dots \right]_{z=p}. \end{aligned}$$

La différence d'une somme étant la somme des différences des termes, on a

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{S_{n-1}}{\mu^n} \Delta^p z^n - \frac{S_{n-2}}{\mu^{n-1}} \Delta^p z^{n-1} + \dots \right] \\ & = \Delta^p \left[ S_{n-1} \frac{z^n}{\mu^n} - \dots \right] = \Delta^p \left[ \frac{z}{\mu} \left( \frac{z}{\mu} - 1 \right) \dots \left( \frac{z}{\mu} - n + 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Posant, d'après les notations des factorielles,

$$\frac{z}{\mu} \left( \frac{z}{\mu} - 1 \right) \dots \left( \frac{z}{\mu} - n + 1 \right) = \frac{1}{\mu^n} z^{n-1-\mu},$$

on retrouve le résultat établi plus haut (n° 24),

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} u^{p-n\mu} \frac{1}{\mu^n} \frac{\Delta^p p^{n-1-\mu}}{1.2 \dots p} \frac{d^p y}{du^p}.$$

46. *Troisième exemple :*

$$x = \sin u.$$

On a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_c \frac{dy}{[\sin(u+u_0) - \sin u_0]^n}.$$

Je rappellerai d'abord la méthode générale d'intégration relative à une fonction rationnelle de  $\sin x$  et de  $\cos x$ .

« On pose

$$e^{x\sqrt{-1}} = z.$$

» De là résulte

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2z\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

» de sorte qu'on peut faire

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(z)}{F(z)},$$

»  $F(z)$  et  $F_1(z)$  désignant des polynômes entiers en  $z$ . » (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 321.)

Dans le problème actuel, je poserai

$$e^{u_1} = z, \quad e^{u_0} = z_0;$$

on a

$$\sin(u + u_0) = \frac{z^2 z_0^2 - 1}{2z_0 z i},$$

$$\sin(u + u_0) - \sin u_0 = \frac{z^2 z_0^2 - 1}{2z_0 z i} - \frac{z_0^2 - 1}{2z_0 i} = \frac{(z - 1)(2z_0^2 + 1)}{2z z_0 i}.$$

Le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  est

$$\frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \frac{2^n z_0^n i^n}{2\pi i} \int_C \frac{z^n u^{p-1} du}{(z-1)^n [z_0^2 z + 1]^n}.$$

Je m'en vais prendre  $z$  comme nouvelle variable. Le contour sera choisi de manière à contenir le seul point critique  $z = 1$ , la seconde racine du dénominateur  $z_0^2 z + 1 = 0$  lui étant extérieure.

$$u^{p-1} du = \frac{1}{i^{p-1}} (Lz)^{p-1} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} \equiv \frac{1}{i^p} (Lz)^{p-1} \frac{dz}{z}.$$

On arrive donc tout naturellement à

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \frac{2^n}{z_0^n} i^{n-p} \int_C \frac{z^{n-1} (Lz)^{p-1} dz}{(z-1)^n \left(z + \frac{1}{z_0^2}\right)^n}.$$

Je m'appuierai sur le résultat suivant. On donne la fonction rationnelle

$$" \frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}}.$$

» Soit, pour abréger,

$$(m, n) = (-1)^n \frac{1.2 \dots (m+n)}{1.2 \dots m.1.2 \dots n},$$

» les multiplicateurs des facteurs

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}}$$

» seront

$$\frac{(\beta, \alpha)}{(a-b)^{\alpha+\beta+1}}, \quad \frac{(\beta, \alpha-1)}{(a-b)^{\alpha+\beta}}, \quad \dots, \quad \frac{(\beta, 0)}{(a-b)^{\beta+1}} "$$

(Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, par M. Hermite, p. 5.)

Ici

$$a-b=1+\frac{1}{z_0^2}=\frac{2\cos u_0}{z_0}.$$

Si donc on pose

$$z^{n-1}(Lz)^{p-1}=A_0+A_1(z-1)+A_2(z-1)^2+\dots+A_n(z-1)^n+\dots,$$

on aura, pour le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$ ,

$$\frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots (p-1)} \frac{2^n}{z_0^n} i^{n-p} \left[ \frac{(n-1, n-1)A_0}{\left(\frac{2\cos u_0}{z_0}\right)^{2n-1}} + \frac{(n-1, n-2)A_1}{\left(\frac{2\cos u_0}{z_0}\right)^{2n-2}} + \dots \right]$$

ou encore

$$i^{n-p} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots (p-1)} \left[ \frac{(n-1, n-1)A_0 z_0^{n-1}}{2^{n-1} \cos u_0^{2n-1}} + \frac{(n-1, n-2)A_1 z_0^{n-1}}{2^{n-2} \cos u_0^{2n-2}} + \dots + \frac{(n-1, 0)A_{n-1}}{\cos u_0^n} \right].$$

Si maintenant on remplace  $z_0$  par sa valeur  $\cos u_0 + i \sin u_0$  et, par suite,  $z_0^p$  par  $\cos pu_0 + i \sin pu_0$ , il est évident, d'après la nature de la question, que le résultat ne doit pas contenir le facteur  $i$ . On est donc

en droit d'écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum C_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = n - 2k, \\ C_p = (-1)^k \frac{1}{\cos^n u} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \left[ A_{n-1}(n-1, 0) + A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\cos u}{2 \cos u} \right. \\ \left. + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\cos 2u}{2^2 \cos^2 u} + \dots \right], \\ p = n - (2k+1), \\ C_p = (-1)^{k+1} \frac{1}{\cos^n u} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \left[ A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\sin u}{2 \cos u} \right. \\ \left. + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\sin 2u}{2^2 \cos^2 u} + \dots \right]. \end{array} \right.$$

On a, pour les coefficients  $A_0, A_1, \dots$ ,

$$1 \cdot 2 \dots \varepsilon A_\varepsilon = \left[ \frac{d^\varepsilon (z^{n-1} L^{p-1} z)}{dz^\varepsilon} \right]_{z=1}$$

$$= z^{n-1} (L^{p-1} z)^{(\varepsilon)}_{z=1} + \frac{\varepsilon}{1} (n-1) z^{n-2} (L^{p-1} z)^{(\varepsilon-1)} + \dots$$

Or remarquons que, si l'on avait calculé la formule relative au changement de variable  $x = e^u$  par la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (\dot{u})^{(n)} \frac{dy}{du} + \frac{(\dot{u}^2)^{(n)}}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots,$$

on aurait été amené à ce résultat

$$(L^p \dot{x})^{(n)} = (-1)^{n-p} P_p S_{n-1}^{n-p} x^{-n},$$

$S_{n-1}^{n-p}$  étant la somme des produits  $n-p$  à  $n-p$  des  $n-1$  premiers nombres naturels  $1, 2, \dots, (n-1)$ .

L'hypothèse  $z = 1$  correspondant à  $Lz = 0$ , on a

$$[L^p z]^{(n)}_{z=1} = (-1)^{n-p} P_p S_{n-1}^{n-p}.$$

On obtiendra donc aisément ce résultat

$$1 \cdot 2 \dots \varepsilon A_\varepsilon = P_{p-1} \left[ S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon-p+1} + \frac{\varepsilon}{1} (n-1) S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon-p} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{1 \cdot 2} (n-1)(n-2) S_{\varepsilon-3}^{\varepsilon-p-1} + \dots \right],$$

$$\varepsilon \geq p-1, \quad S_\lambda^\mu = (-1)^\mu \Pi_\lambda^\mu,$$

$\Pi_\lambda^\mu$  étant la somme des produits  $\mu$  à  $\mu$  des  $\lambda$  premiers nombres 1, 2, ...,  $\lambda$ .

Nous avons, d'ailleurs, remarqué (n° 44) que l'on doit faire  $S_{-1}^0 = 1$ . Ce fait est très important ici. Tant que  $p > 1$ , comme  $\varepsilon \geq p - 1$ ,  $A_0$  n'entre pas dans la formule et  $S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon-p+1}$  a son exposant supérieur au plus égal à son exposant inférieur. Si  $p = 1$ , il faut conserver  $A_0$  et remarquer aussi que, dans tous les termes  $S_{\varepsilon-1}^\varepsilon$ , l'indice supérieur surpasse de 1 l'indice inférieur; il faut alors pousser jusqu'à  $S_{-1}^0$ , et ne conserver que ce terme, comme je vais le vérifier.

*Application numérique :*

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \sum C_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

$$1^\circ \quad \equiv p = 1, \quad n = 5, \quad \text{d'où} \quad k = 2;$$

on a

$$C_1 = (-1)^2 \frac{1}{\cos^5 u} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} \left[ A_4(n-1, 0) + A_3(n-1, 1) \frac{\cos u}{2 \cos u} + A_2(n-1, 2) \frac{\cos 2u}{2^2 \cos^2 u} \right. \\ \left. + A_1(n-1, 3) \frac{\cos 3u}{2^3 \cos^3 u} + A_0(n-1, 4) \frac{\cos 4u}{2^4 \cos^4 u} \right].$$

On a d'abord

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 A_4 = S_4^4 + \frac{4}{1} 4 S_3^3 + \dots + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 S_{-1}^0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 S_{-1}^0,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 A_3 = S_3^3 + \frac{3}{1} 4 S_2^2 + \dots + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} 4 \cdot 3 \cdot 2 S_{-1}^0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 S_{-1}^0,$$

$$1 \cdot 2 A_2 = S_2^2 + \frac{2}{1} 4 S_1^1 + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} 4 \cdot 3 S_{-1}^0 = 3 \cdot 4 S_{-1}^0,$$

$$1 A_1 = S_1^1 + \frac{1}{1} 4 S_{-1}^0 = 4 S_{-1}^0,$$

$$A_0 = S_{-1}^0 = S_{-1}^0,$$

$$A_4 = 1, \quad A_3 = 4, \quad A_2 = 6, \quad A_1 = 4, \quad A_0 = 1,$$

$$(4, 0) = 1, \quad (4, 1) = -\frac{5}{1}, \quad (4, 2) = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}, \quad (4, 3) = -\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$(4, 4) = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$



On a donc

$$C_1 = \frac{24}{\cos^4 u} \left[ 1 - 10 \frac{\cos u}{\cos u} + \frac{45}{2} \frac{\cos 2u}{\cos^2 u} - \frac{35}{2} \frac{\cos 3u}{\cos^3 u} + \frac{35}{8} \frac{\cos 4u}{\cos^4 u} \right].$$

$$2^\circ \quad \equiv p = 2, \quad n = 5, \quad k = 1,$$

$$C_2 = \frac{(-1)^2}{\cos^5 u} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} \left[ A_3(4, 1) \frac{\sin u}{2 \cos u} + A_2(4, 2) \frac{\sin 2u}{2^2 \cos^2 u} \right. \\ \left. + A_1(4, 3) \frac{\sin 3u}{2^3 \cos^3 u} + A_0(4, 4) \frac{\sin 4u}{2^4 \cos^4 u} \right].$$

On a

$$1 \cdot 2 \cdot 3 A_3 = S_2^{1-2+1} + \frac{3}{1} 4 S_1^1 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} 4 \cdot 3 S_0^0 = 2 - 12 + 36 = 26,$$

$$1 \cdot 2 A_2 = S_1^1 + \frac{2}{1} 4 S_0^0 = -1 + 8 = 7,$$

$$1 A_1 = S_0^0 = 1,$$

$$A_0 = 0,$$

$$A_3 = \frac{13}{3}, \quad A_2 = \frac{7}{2}, \quad A_1 = 1,$$

$$(4, 1) = -\frac{5}{1}, \quad (4, 2) = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}, \quad (4, 3) = -\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Il vient donc

$$C_2 = \frac{1}{\cos^5 u} \left[ -260 \frac{\sin u}{\cos u} + 315 \frac{\sin 2u}{\cos^2 u} - 105 \frac{\sin 3u}{\cos^3 u} \right].$$

$$3^\circ \quad \equiv p = 3, \quad n = 5, \quad k = 1,$$

$$C_3 = -\frac{1}{\cos^5 u} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left[ A_4(4, 0) + A_3(4, 1) \frac{\cos u}{2 \cos u} + A_2(4, 2) \frac{\cos 2u}{2^2 \cos^2 u} + \dots \right].$$

Or

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 A_4 = 1 \cdot 2 \left[ S_3^{1-2+1} + \frac{4}{1} 4 S_2^1 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} 4 \cdot 3 S_1^0 \right] = 1 \cdot 2 [11 - 3 \cdot 16 + 3 \cdot 24],$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 A_3 = 1 \cdot 2 \left[ S_2^1 + \frac{3}{1} 4 S_1^0 \right] = 1 \cdot 2 [-3 + 12],$$

$$1 \cdot 2 A_2 = 1 \cdot 2 S_1^0,$$

$$A_4 = \frac{35}{12}, \quad A_3 = 3, \quad A_2 = 1,$$

d'où

$$C_3 = \frac{1}{\cos^3 u} \left[ -35 + 90 \frac{\cos u}{\cos u} - 45 \frac{\cos 2u}{\cos^2 u} \right].$$

4°

$$\equiv p = 4, \quad n = 5, \quad k = 0,$$

$$C_4 = -1 \frac{1}{\cos^5 u} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} [A_3(4, 1)] \frac{\sin u}{2 \cos u},$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 A_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 S_3^0, \quad A_3 = 1,$$

$$C_4 = \frac{10 \sin u}{\cos^5 u}.$$

5°

$$\equiv p = 5, \quad n = 5, \quad k = 0,$$

$$C_5 = \frac{1}{\cos^5 u} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [A_4(4, 0)],$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 A_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 S_4^0, \quad A_4 = 1,$$

$$C_5 = \frac{1}{\cos^5 u}.$$

Il est très facile maintenant d'exprimer tout en fonction de  $\sin u$  et de  $\cos u$ . Le calcul ne présente pas assez d'intérêt pour que je le transcrive. On retrouverait le résultat qui se calcule directement

$$\begin{aligned} \frac{d^5 y}{dx^5} &= \frac{1}{\cos^5 u} \frac{d^5 y}{du^5} + \frac{10 \sin u}{\cos^6 u} \frac{d^4 y}{du^4} + \frac{10 \cos^2 u + 45 \sin^2 u}{\cos^7 u} \frac{d^3 y}{du^3} \\ &\quad + \frac{55 \sin u \cos^2 u + 105 \sin^3 u}{\cos^8 u} \frac{d^2 y}{du^2} \\ &\quad + \frac{9 \cos^4 u + 90 \sin^2 u \cos^2 u + 105 \sin^4 u}{\cos^9 u} \frac{dy}{du}. \end{aligned}$$

47. Quatrième exemple :

$$x = \cos u.$$

Le résultat se déduit immédiatement du précédent. Posant

$$x = \sin \theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - u,$$

on a

$$\frac{d^n y}{d\theta^n} = (\dot{u})^{(n)} \frac{dy}{du} + \frac{(\dot{u}^2)^{(n)}}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + \frac{(\dot{u}^n)^{(n)}}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n y}{du^n}.$$

Comme  $u = \frac{\pi}{2} - \theta$ ,  $u' = -1$ ,  $u'' = u''' = \dots = 0$ , il ne faut donc

conserver à chaque coefficient  $(u^p)^{(n)}$  que les dérivées premières; il ne restera qu'un coefficient

$$(u^n)^{(n)} = 1.2 \dots n (u')^n, \quad \text{d'où} \quad \frac{(u^n)^{(n)}}{1.2 \dots n} = (-1)^n.$$

Il vient donc

$$\frac{d^{2\mu} y}{d\theta^{2\mu}} = \frac{d^{2\mu} y}{du^{2\mu}}, \quad \frac{d^{2\mu+1} y}{d\theta^{2\mu+1}} = - \frac{d^{2\mu+1} y}{du^{2\mu+1}}.$$

Alors, puisque

$$x = \sin \theta, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum C_p \frac{d^p y}{d\theta^p},$$

on a

$$\begin{aligned} p = n - 2k, \quad C_p &= \frac{(-1)^k}{\cos^n \theta} \left[ B_0 + B_1 \frac{\cos \theta}{\cos \theta} + B_2 \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta} + \dots \right], \\ p = n - (2k + 1), \quad C_p &= \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^n \theta} \left[ B_1 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + B_2 \frac{\sin 2\theta}{\cos^2 \theta} + \dots \right]; \end{aligned}$$

il en résulte

$$x = \cos u, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum (-1)^p C_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$\begin{aligned} p = n - 2k, \quad C_p &= \frac{(-1)^k}{\sin^n u} \left[ B_0 + B_1 \frac{\sin u}{\sin u} - B_2 \frac{\cos 2u}{\sin^2 u} - B_3 \frac{\sin 3u}{\sin^3 u} \right. \\ &\quad \left. + B_4 \frac{\cos 4u}{\sin^4 u} + B_5 \frac{\sin 5u}{\sin^5 u} - \dots \right], \end{aligned}$$

$$p = n - (2k + 1), \quad C_p = \frac{(-1)^{k+1}}{\sin^n u} \left[ B_1 \frac{\cos u}{\sin u} + B_2 \frac{\sin 2u}{\sin^2 u} - \dots \right].$$

Le calcul sera le même que dans le cas précédent. J'indique rapidement la marche.

*Application numérique :*

$$\frac{d^4 y}{dx^4}.$$

Comme coefficient de  $\frac{dy}{du}$ , on a

$$\begin{aligned} p = 1, \quad k = 1, \\ \frac{-1}{\sin^4 u} \left[ B_1 \frac{\cos u}{\sin u} + B_2 \frac{\sin 2u}{\sin^2 u} - B_3 \frac{\cos 3u}{\sin^3 u} - \dots \right], \\ B_1 = - \frac{1.2.3}{1} \frac{2.3}{1.2} \frac{4}{2}, \quad B_2 = \frac{1.2.3}{1} 3 \frac{4.5}{1.2} \frac{1}{2^2}, \quad B_3 = - \frac{1.2.3}{1} \frac{4.5.6}{1.2.3} \frac{1}{2^3}; \\ B_1 = -36, \quad B_2 = 45, \quad B_3 = -15. \end{aligned}$$

Le coefficient de  $\frac{d^2 \gamma}{du^2}$  est

$$p=2, \quad k=1, \\ -\frac{1}{\sin^4 u} \left[ B_0 + B_1 \frac{\sin u}{\sin u} - B_2 \frac{\cos 2u}{\sin^2 u} \right], \\ B_0 = 11, \quad B_1 = -30, \quad B_2 = 15.$$

Enfin, pour  $\frac{d^3 \gamma}{du^3}$ , on a

$$p=3, \quad k=0, \\ \frac{1}{\sin^4 u} \left[ B_1 \frac{\cos u}{\sin u} \right], \quad B_1 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{2} = -6.$$

On repasserait facilement de cette expression à

$$\frac{d^4 \gamma}{dx^4} = \frac{1}{\sin^4 u} \frac{d^4 \gamma}{du^4} - \frac{6 \cos u}{\sin^5 u} \frac{d^3 \gamma}{du^3} \\ + \frac{4 \sin^2 u + 15 \cos^2 u}{\sin^6 u} \frac{d^2 \gamma}{du^2} - \frac{9 \sin^2 u \cos u + 15 \cos^3 u}{\sin^7 u} \frac{d \gamma}{du}.$$

18. *Cinquième exemple :*

$$x = \operatorname{tang} u.$$

On a

$$\frac{d^n \gamma}{dx^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{d\gamma}{[\operatorname{tang}(u+u_0) - \operatorname{tang} u_0]^n}.$$

Or on sait que

$$z = e^{ui}, \quad \operatorname{tang} u = i \frac{1-z^2}{1+z^2}, \\ \operatorname{tang}(u+u_0) - \operatorname{tang} u_0 = i \frac{2z_0^2(1-z^2)}{(1+z_0^2)^2(1+z^2z_0^2)}.$$

En posant, pour abréger, l'écriture  $\alpha = \frac{1}{z_0^2}$ , on voit sans peine que le coefficient de  $\frac{d^p \gamma}{du^p}$ , qui était

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)} \int_{(C)} \frac{u^{p-1} du}{[\operatorname{tang}(u+u_0) - \operatorname{tang} u_0]^n},$$

deviendra

$$(-1)^n \frac{1}{2\pi i} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)p} (-i)^{n+p} \frac{(1+z_0^2)^n}{2^n} \int_C \frac{(z^2 + \alpha)^n}{(z^2 - 1)^n} d(Lz)^p.$$

Posant

$$z^2 = \xi, \quad d(Lz)^p = \frac{1}{2^p} d(L\xi)^p,$$

on a

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots p} (-1)^n (-i)^{n+p} \frac{(1+z_0^2)^n}{2^{n+p}} \int_C \frac{(\xi + \alpha)^n \frac{d(L\xi)^p}{d\xi}}{(\xi - 1)^n} d\xi.$$

Écrivant, pour abréger,

$$(\xi + \alpha)^n \frac{d(L\xi)^p}{d\xi} = F(\xi),$$

on a

$$F(\xi) = F(1) + \frac{\xi - 1}{1} F'(1) + \dots + \frac{(\xi - 1)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(1) + \dots;$$

on voit que le coefficient  $\frac{d^p y}{du^p}$  devient

$$(-1)^p (i)^{n+p} \frac{1}{1.2 \dots p} \frac{(1+z_0^2)^n}{2^{n+p}} F^{(n-1)}(1).$$

Tout revient au calcul de  $F^{(n-1)}(1)$ ; or

$$F^{(n-1)}(\xi) = (\alpha + \xi)^n \frac{d^n (L\xi)^p}{d\xi^n} + \frac{n-1}{1} n (\alpha + \xi)^{n-1} \frac{d^{n-1} (L\xi)^p}{d\xi^{n-1}} + \dots$$

Or nous avons déjà remarqué que, pour  $\xi = 1$ , on a

$$\frac{d^q (L\xi)^p}{d\xi^q} = S_{q-1}^{q-p}, \quad S_{q-1}^{q-p} = (-1)^{q-p} \Pi_{q-1}^{q-p},$$

en désignant par  $\Pi_\lambda^\mu$  la somme des produits  $\mu$  à  $\mu$  des  $\lambda$  premiers nombres naturels.

D'autre part, pour  $\xi = 1$ , on a

$$\alpha + 1 = \frac{z_0^2 + 1}{z_0^2}.$$

Le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  devient alors, en groupant les termes,

$$(-1)^p (i)^{n+p} \frac{1}{2^{n-p}} \left\{ \left( \frac{z_0^2 + 1}{2 z_0} \right)^{2n} S_{n-1}^{n-p} + \frac{n-1}{1} n \left( \frac{z_0^2 + 1}{2 z_0} \right)^{2n-1} S_{n-2}^{n-p-1} \frac{z_0}{2} + \dots \right\}.$$

Remarquant, comme plus haut, que le résultat ne doit pas contenir  $i$ ,

on obtient, en repassant à  $\sin u$  et  $\cos u$ ,

$$\frac{z_0^2 + 1}{2z_0} = \cos u, \quad z_0^p = \cos pu + i \sin pu.$$

On aura

$$x = \operatorname{tang} u, \quad \frac{d^n \gamma}{dx^n} = \sum D_p \frac{d^p \gamma}{du^p}.$$

$$1^\circ \quad n + p = 2k :$$

$$D_p = (-1)^{p+k} 2^{n-p} \left[ S_{n-1}^{n-p} \cos^{2n} u + \frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1} \cos^{2n-1} u \frac{\cos u}{2} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2} \cos^{2n-2} u \frac{\cos 2u}{2^2} + \dots \right];$$

$$2^\circ \quad n + p = 2k + 1 :$$

$$D_p = -(-1)^{p+k} 2^{n-p} \left[ \frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1} \cos^{2n-1} u \frac{\sin u}{2} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2} \cos^{2n-2} u \frac{\sin 2u}{2^2} + \dots \right].$$

*Application numérique :*

$$\frac{d^k \gamma}{dx^k} = \sum D_p \frac{d^p \gamma}{du^p}.$$

On a

$$n = 4, \quad p = 1, \quad n + p = 5, \quad k = 2;$$

$$D_1 = -(-1)^2 2^3 \left[ \frac{3}{1} 4 S_2^3 \cos^7 u \frac{\sin u}{2} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} 4 \cdot 3 S_1^2 \cos^6 u \frac{\sin 2u}{2^2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} 4 \cdot 3 \cdot 2 S_0^1 \cos^5 u \frac{\sin 3u}{2^3} \right];$$

$$n = 4, \quad p = 2, \quad n + p = 6, \quad k = 3;$$

$$D_2 = (-1)^2 2^2 \left[ S_3^2 \cos^8 u + \frac{3}{1} 4 S_2^1 \cos^7 u \frac{\cos u}{2} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} 4 \cdot 3 S_1^0 \cos^6 u \frac{\cos 2u}{2^2} \right];$$

$$n = 4, \quad p = 3, \quad n + p = 7, \quad k = 3,$$

$$-(-1)^2 \left[ \frac{3}{1} 4 S_2^0 \cos^7 u \sin u \right],$$

$$n = 4, \quad p = 4, \quad n + p = 8, \quad k = 4;$$

$$(-1)^2 2^0 S_3^0 \cos^4 u.$$

49. *Sixième exemple :*

$$x = \cot u.$$

Il me semble inutile d'insister à nouveau sur les remarques presque évidentes qui ont permis de passer du cas de  $x = \sin u$  à celui de  $x = \cos u$ . On aura

$$x = \cot u, \quad \frac{d^n \gamma}{dx^n} = \sum E_p \frac{d^p \gamma}{du^p}.$$

1°  $n + p = 2k :$

$$E_p = (-1)^{2p+k} 2^{n-p} \left[ S_{n-1}^{n-p} \sin^{2n} u + \frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1} \sin^{2n-1} u \frac{\sin u}{2} \right. \\ \left. - \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2} \sin^{2n-2} u \frac{\cos 2u}{2^2} \right. \\ \left. - \dots \sin^{2n-3} u \frac{\sin 3u}{2^3} + \dots \sin^{2n-4} u \frac{\cos 4u}{2^4} + \dots \right].$$

2°  $n + p = 2k + 1 :$

$$E_p = (-1)^{2p+k+1} 2^{n-p} \left[ \frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1} \sin^{2n-1} u \frac{\cos u}{2} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2} \sin^{2n-2} u \frac{\sin 2u}{2^2} \right. \\ \left. - \dots \sin^{2n-3} u \frac{\cos 3u}{2^3} - \dots \sin^{2n-4} u \frac{\cos 4u}{2^4} + \dots \right].$$

*Application numérique :*

$$\frac{d^5 \gamma}{dx^5} = \sum E_p \frac{d^p \gamma}{du^p}.$$

On a, pour  $n = 5$ ,  $p = 1$ ,  $n + p = 6$ ,  $k = 3$ ,

$$E_1 = (-1)^{2+3} 2^4 \left[ S_4^4 \sin^{10} u + \frac{4}{1} 5 S_3^3 \sin^9 u \frac{\sin u}{2} - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} 5 \cdot 4 S_2^2 \sin^8 u \frac{\cos 2u}{2^2} \right. \\ \left. - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} 5 \cdot 4 \cdot 3 S_1^1 \frac{\sin 3u}{2^3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 S_0^0 \frac{\cos 4u}{2^4} \right];$$

$$S_4^4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad S_3^3 = -1 \cdot 2 \cdot 3 = -6, \quad S_2^2 = 1 \cdot 2, \quad S_0^0 = 1.$$

On a

$$- 24[2^4 \sin^{10} u - 2^3 \cdot 5 \sin^{10} u - 2^3 \cdot 5 \sin^8 u \cos 2u + 5 \cdot 4 \sin^3 u + 5 \cos 4u].$$

Pour  $n = 5$ ,  $p = 2$ ,  $n + p = 7$ ,  $k = 3$ ,

$$E_2 = (-1)^{4+2+1} 2^3 \left[ \frac{4}{1} 5 S_3^2 \sin^9 u \frac{\cos u}{2} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} 5 \cdot 4 S_2^1 \sin^8 u \frac{\sin 2u}{2^2} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} 5 \cdot 4 \cdot 3 S_1^0 \sin^7 u \frac{\cos 3u}{2^3} \right],$$

$$S_3^2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11, \quad S_2^1 = -(1 + 2) = -3, \quad S_1^0 = 1.$$

Pour  $n = 5$ ,  $p = 3$ ,  $n + p = 8$ ,  $k = 4$ ,

$$D_3 = (-1)^{6+3} 2^3 \left[ S_3^2 \sin^{10} u + \frac{4}{1} 5 S_2^1 \sin^9 u \frac{\sin u}{2} - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} 5 \cdot 4 S_1^0 \sin^8 u \frac{\cos 2u}{2^2} \right],$$

$$S_3^2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35,$$

$$S_2^1 = -(1 + 2 + 3) = -6,$$

$$S_1^0 = 1.$$

Pour  $n = 5$ ,  $p = 4$ ,  $n + p = 9$ ,  $k = 4$ ,

$$D_4 = (-1)^{8+4+1} 2^4 \left[ \frac{4}{1} 5 S_3^2 \sin^9 u \frac{\cos u}{2} \right], \quad S_3^2 = 1.$$

Pour  $n = 5$ ,  $p = 5$ ,  $n + p = 10$ ,  $k = 5$ ,

$$D_5 = (-1)^{10+5} 2^5 S_4^0 \sin^{10} u = -\sin^{10} u.$$

Revenant à  $\sin u$  et à  $\cos u$ , on obtiendrait le résultat obtenu par un calcul de proche en proche,

$$\begin{aligned} \frac{d^5 y}{dx^5} &= 24 \sin^6 u [-5 \cos^4 u + 10 \sin^2 u \cos^2 u - \sin^4 u] \frac{dy}{du} \\ &+ 8 \sin^7 u [-30 \cos^3 u + 20 \sin^2 u \cos u] \frac{d^2 y}{du^2} \\ &+ 20 \sin^8 u [-6 \cos^2 u + \sin^2 u] \frac{d^3 y}{du^3} \\ &- 20 \sin^9 u \cos u \frac{d^4 y}{du^4} - \sin^{10} u \frac{d^5 y}{du^5}. \end{aligned}$$

50. *Septième exemple :*

$$x = \arcsin u.$$

Je ferai d'abord la remarque suivante. Dans le Chapitre II, on a



démontré que

$$x = \mathbf{L}u, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{1.2 \dots \lambda} \frac{\Delta^\lambda \mathbf{o}^n}{1.2 \dots \lambda} u^\lambda \frac{d^\lambda y}{du^\lambda}.$$

Or, si l'on appliquait la méthode que j'utilise présentement, le coefficient de  $\frac{d^\lambda y}{du^\lambda}$  serait

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots (\lambda-1)} \int_c \frac{(u-u_0)^{\lambda-1}}{(\mathbf{L}u - \mathbf{L}u_0)^n} du.$$

On a donc l'identité suivante

$$\frac{1.2 \dots (n-1)}{2\pi i} \int_c \frac{(u-u_0)^{\lambda-1}}{(\mathbf{L}u - \mathbf{L}u_0)^n} du = \frac{\Delta^\lambda \mathbf{o}^n}{\lambda} u_0^\lambda.$$

Revenant au problème actuel,

$$x = \arcsin u, \quad u = \sin x,$$

le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  sera l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots p} \int_c \frac{d(u-u_0)^p}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{2\pi i} \frac{(n-1)!}{p!} \int_c \frac{d(\sin x - \sin x_0)^p}{(x-x_0)^n}.$$

Il a déjà souvent été remarqué que rien n'empêche de changer la variable sous le signe  $\int$ . J'emploierai encore la formule

$$z = e^{xi}, \quad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2zi}, \quad x = -i\mathbf{L}z.$$

Substituant, on obtiendra

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots (p-1)p} \frac{(i)^{n-p}}{(2z_0)^p} \int_c \frac{\frac{d}{dz} \left[ (z-z_0) \left( z_0 + \frac{1}{z} \right) \right]^p}{(\mathbf{L}z - \mathbf{L}z_0)^n} dz.$$

Si l'on pose

$$\frac{d \left[ (z-z_0) \left( z_0 + \frac{1}{z} \right) \right]^p}{dz} = \mathbf{F}(z),$$

on est ramené au calcul suivant :

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}(z_0) + \frac{z-z_0}{1} \mathbf{F}'(z_0) + \dots$$

Il s'agit d'obtenir un certain nombre de termes de la forme

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots (p-1)p} \frac{(i)^{n-p}}{(2z_0)^p} \frac{F^{(\lambda-1)}(z_0)}{1.2 \dots (\lambda-1)} \int_C \frac{(z-z_0)^{\lambda-1} dz}{(Lz - Lz_0)^n}$$

ou encore, d'après la remarque initiale,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.2 \dots (p-1)p} \frac{(i)^{n-p}}{(2z_0)^p} \frac{F^{(\lambda-1)}(z_0)}{1.2 \dots (\lambda-1)} \frac{2\pi i}{1.2 \dots (n-1)} \frac{\Delta^{\lambda} 0^n}{\lambda} z_0^\lambda \\ &= \frac{i^{n-p} z_0^{\lambda-p}}{P_p P_{\lambda} 2^p} F^{(\lambda-1)}(z_0) \Delta^{\lambda} 0^n. \end{aligned}$$

Revenant au développement de  $F^{(\lambda-1)}(z_0)$ , on a à effectuer ce calcul

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} \left[ (z-z_0) \left( z_0 + \frac{1}{z} \right) \right]^p = \sum \frac{P_\lambda}{P_\alpha P_{\lambda-\alpha}} [(z-z_0)^p]^{(\alpha)} \left[ \left( z_0 + \frac{1}{z} \right)^p \right]^{(\lambda-\alpha)}.$$

Comme il faudra faire  $z = z_0$ , on ne peut prendre que la valeur  $\alpha = p$ ,

$$F^{(\lambda-1)}(z_0) = \frac{P_\lambda}{P_p P_{\lambda-p}} P_p \left[ \left( z_0 + \frac{1}{z} \right)^p \right]^{(\lambda-p)}.$$

On voit d'abord qu'il est nécessaire que  $\lambda$  soit au moins égal à  $p$ . Il reste à calculer

$$\sum_{\lambda=p}^{\lambda=n} \frac{i^{n-p}}{2^p} \frac{\Delta^{\lambda} 0^n}{P_p P_{\lambda-p}} z_0^{\lambda-p} \left[ \left( \frac{zz_0+1}{z} \right)^p \right]_{z=z_0}^{(\lambda-p)}.$$

Or on a

$$\left( \frac{zz_0+1}{z} \right)^p = z_0^p + \frac{p}{1} z_0^{p-1} \frac{1}{z} + \frac{p(p-1)}{1.2} z_0^{p-2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

Il serait facile de prendre la dérivée d'ordre  $\lambda - p$  de cette expression, et, en remplaçant  $z_0$  par  $\cos x_0 + i \sin x_0$  et  $z_0^\mu$  par  $\cos \mu x_0 + i \sin \mu x_0$ , on obtiendrait (en ne conservant que la partie réelle), une expression algébrique générale du coefficient  $\frac{d^p y}{du^p}$ . Cette formule théorique me paraissant presque inapplicable, je ne la développerai pas. Je me bornerai à faire le calcul dans le cas de  $x = \arctan u$ , ce qui montrera clairement ce qu'il resterait à faire ici.

51. *Huitième exemple :*

$$x = \text{arc tang } u.$$

Le coefficient de  $\frac{d^p y}{du^p}$  sera

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{P_{n-1}}{P_p} \int_C \frac{d(u - u_0)^p}{[\text{arc tang } u - \text{arc tang } u_0]^n}$$

ou encore

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{P_{n-1}}{P_p} \int_C \frac{d[\text{tang } x - \text{tang } x_0]^p}{(x - x_0)^n}.$$

Or

$$\text{tang } x = -i \frac{e^{2xi} - 1}{e^{2xi} + 1}.$$

Posant  $e^{2xi} = z$ ,

$$\text{tang } x - \text{tang } x_0 = -2i \frac{z - z_0}{(z_0 + 1)(z + 1)}, \quad x = \frac{1}{2i} \text{L}z.$$

Il vient

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{P_{n-1}}{P_p} (2i)^n \frac{(-2i)^p}{(z_0 + 1)^p} \int_C \frac{d\left(\frac{z - z_0}{z + 1}\right)^p}{(\text{L}z - \text{L}z_0)^n}.$$

Posant, pour abréger,

$$\frac{d\left(\frac{z - z_0}{z + 1}\right)^p}{dz} = F(z),$$

$$F(z) = F(z_0) + \frac{z - z_0}{1} F'(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^{\lambda-1}}{1 \cdot 2 \dots (\lambda-1)} F^{(\lambda-1)}(z_0) + \dots;$$

le coefficient cherché sera une somme de termes de la forme

$$\frac{1}{2\pi i} (-1)^p \frac{(2i)^{n+p}}{(z_0 + 1)^p} \frac{P_{n-1}}{P_p} \frac{F^{(\lambda-1)}(z_0)}{P_{\lambda-1}} \int \frac{(z - z_0)^{\lambda-1} dz}{(\text{L}z - \text{L}z_0)^n}.$$

D'après la remarque faite dans l'exemple précédent, on peut encore écrire

$$(-1)^p \frac{(2i)^{n+p}}{P_p} \frac{\Delta^{\lambda-1} z_0^n}{P_{\lambda}} \frac{z_0^{\lambda} F^{(\lambda-1)}(z_0)}{(z_0 + 1)^p}.$$

Reste à développer le calcul de  $F^{(\lambda-1)}(z_0)$  qui nous permettra de reconnaître immédiatement que  $\lambda$ , quantité inférieure ou égale à  $n$ , n'est

jamais inférieure à  $p$ . En effet,

$$\frac{\partial^\lambda \left( \frac{z - z_0}{z + 1} \right)^p}{\partial z^\lambda} = \sum \frac{P_\lambda}{P_\alpha P_{\lambda-\alpha}} [(z - z_0)^p]^{(\alpha)} [(z + 1)^{-p}]^{(\lambda-\alpha)}.$$

Comme on doit faire ultérieurement  $z = z_0$ , on ne peut prendre que la valeur  $\alpha = p$ , ce qui n'est évidemment possible que si  $\lambda \geq p$ . Il reste

$$\frac{P_\lambda}{P_p P_{\lambda-p}} P_p [(z + 1)^{-p}]_{z=z_0}^{(\lambda-p)} = (-1)^{\lambda-p} \frac{P_\lambda}{P_{\lambda-p}} \frac{p(p+1) \dots (\lambda-1)}{(z_0 + 1)^\lambda},$$

c'est-à-dire

$$(-1)^\lambda \frac{(2i)^{n+p}}{P_p} \frac{\Delta^\lambda 0^n}{P_{\lambda-p}} p(p+1) \dots (\lambda-1) \frac{z_0^\lambda}{(z_0 + 1)^{\lambda+p}}.$$

Revenant à  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{z_0}{z_0 + 1} &= \frac{e^{2x_0 i}}{e^{2x_0 i} + 1} = \frac{2e^{x_0 i}}{e^{2x_0 i} + 1} \frac{e^{-x_0 i}}{2} = \frac{e^{x_0 i}}{2 \cos x_0}, \\ \frac{1}{z_0 + 1} &= \frac{1}{e^{2x_0 i} + 1} = \frac{2e^{x_0 i}}{e^{2x_0 i} + 1} \frac{1}{2e^{x_0 i}} = \frac{e^{-x_0 i}}{2 \cos x_0}. \end{aligned}$$

Supprimant l'indice de  $x_0$  qui est inutile,

$$(-1)^\lambda (2i)^{n+p} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{e^{(\lambda-p)x}}{2^{\lambda+p} \cos^{\lambda+p} x}.$$

Si maintenant on ne prend que la partie réelle qui doit seule rester dans le résultat, il vient

$$x = \arctan u, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum G_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

1°  $n + p = 2k$  :

$$G_p = \sum_{\lambda=p}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda+k} \frac{2^n}{2^\lambda} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{\cos(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p} x};$$

2°  $n + p = 2k + 1$  :

$$G_p = \sum_{\lambda=p}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda+k+1} \frac{2^n}{2^\lambda} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{\sin(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p} x}.$$

Application numérique :

$$\frac{d^k y}{dx^k}.$$

En faisant successivement  $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 4$ , on a :

1° Pour  $n = 4, p = 1, n + p = 5, k = 2$ ,

$$\lambda = 1, \dots, \lambda - p = 0, \quad \sin 0 = 0,$$

$$\lambda = 2, \dots, (-1)^2 \frac{2^1}{2^2} \frac{P_1}{P_0 P_1 P_1} \Delta^2 o^1 \frac{\sin x}{\cos^3 x} = -4.14 \frac{\sin x}{\cos^3 x},$$

$$\lambda = 3, \dots, (-1)^6 \frac{2^1}{2^3} \frac{P_2}{P_1 P_0 P_2} \Delta^3 o^1 \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} = 2.36 \frac{\sin 2x}{\cos^4 x},$$

$$\lambda = 4, \dots, \dots \Delta^4 o^1 \frac{\sin 3x}{\cos^5 x} = -24 \frac{\sin 3x}{\cos^5 x};$$

2° Pour  $n = 4, p = 2, n + p = 6, k = 3$ ,

$$\lambda = 2, \dots, (-1)^{2+3} \frac{2^1}{2^2} \frac{P_1}{P_1 P_2 P_0} \Delta^2 o^1 \frac{1}{\cos^4 x} = -2.14 \frac{1}{\cos^4 x},$$

$$\lambda = 3, \dots, \frac{2^1}{2^3} \frac{P_2}{P_1 P_2 P_1} \Delta^3 o^1 \frac{\cos x}{\cos^5 x} = 2.36 \frac{\cos x}{\cos^5 x},$$

$$\lambda = 4, \dots, \dots \frac{P_3}{P_1 P_2 P_3} \Delta^4 o^1 \frac{\cos 2x}{\cos^6 x} = -36 \frac{\cos 2x}{\cos^6 x};$$

3° Pour  $n = 4, p = 3, n + p = 7, k = 3$ ,

$$\lambda = 3, \dots, \sin 0 = 0,$$

$$\lambda = 4, \dots, (-1)^8 \frac{P_3}{P_2 P_3 P_1} \Delta^4 o^1 \frac{\sin x}{\cos^7 x} = 12 \frac{\sin x}{\cos^7 x};$$

4° Pour  $n = 4, p = 4, n + p = 8$ ,

$$\lambda = 4, \dots, (-1)^8 \frac{P_3}{P_3 P_4 P_0} \Delta^4 o^1 \frac{1}{\cos^8 x} = \frac{1}{\cos^8 x}.$$

52. Neuvième exemple :

$$x = \arccos u \quad \text{ou} \quad x = \operatorname{arccot} u.$$

La méthode étant la même dans les deux cas, je ferai le raisonnement en partant de

$$x = \operatorname{arccot} u.$$

On a

$$x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang} u.$$

Posant

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{ou encore} \quad x = \frac{\pi}{2} - x_1,$$

on a

$$x_1 = \text{arc tang } u.$$

Nous avons calculé dans l'exemple précédent les coefficients  $G$ , tels que

$$\frac{d^n y}{dx_1^n} = \sum G_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$G_p$  étant exprimé en fonction des sinus et des cosinus des multiples de  $x_1$ .

Or nous avons démontré, pour passer du cas du sinus à celui du cosinus (n° 47), que

$$\frac{d^n y}{dx_1^n} = (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n}.$$

On aura donc actuellement

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \sum G_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Il faudra toutefois prendre la précaution de remplacer  $x$  par  $\frac{\pi}{2} - x$  dans l'expression écrite plus haut (n° 51) des coefficients  $G_p$ .

## RÉSUMÉ.

53. La formule du changement de variable indépendante peut être soit mise sous forme de déterminant, soit développée sans terme inutile.

$$y = f(x), \quad x = \varphi(u) :$$

1°

$$\frac{1}{1.2 \dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} (x)^{(1)} & (x^2)^{(1)} & \dots & (x^{m-1})^{(1)} & y^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x)^{(m)} & (x^2)^{(m)} & \dots & (x^{m-1})^{(m)} & y^{(m)} \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3 \dots 1.2 \dots m (x')^{1+2+\dots+m}};$$

2°

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{A_p}{1.2 \dots (p-1)} y^{(p)},$$

$$A_p = \sum (-1)^\alpha \frac{P_{n+\alpha-1}}{P_\beta \dots P_\lambda P_2^\beta \dots P_k^\lambda} \frac{(x')^\beta \dots (x^{(k)})^\lambda}{(x')^{n+\alpha}},$$

$$\beta + 2\gamma + \dots + (k-1)\lambda = n-p,$$

$$\beta + \gamma + \dots + \lambda = \alpha.$$

Si  $\varphi(u)$  est une des fonctions usuelles  $u^\mu$ ,  $e^\mu$ ,  $Lu$ ,  $\sin u$ ,  $\tanh u$ ,  $\arcsin u$ ,  $\operatorname{arctan} u$ , on possède des formules qui peuvent être compliquées, mais qui ne contiennent que des coefficients numériques à expression générale connue.

1°  $x = u^\mu$  :

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\mu^n} \frac{\Delta^p_1 p^{n-\mu}}{1.2 \dots p} u^p \frac{d^p y}{du^p};$$

2°  $x = e^u$  :

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[ \frac{d}{du} - (n-1) \right] \left[ \frac{d}{du} - (n-2) \right] \dots \left( \frac{d}{du} - 1 \right) \frac{dy}{du};$$

3°  $x = Lu$  :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\Delta^p_0 n}{1.2 \dots p} u^p \frac{d^p y}{du^p};$$

4°  $x = \sin u$  :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} C_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour  $p = n - 2k$ ,

$$C_p = \frac{(-1)^k}{\cos^n u} \frac{P_{n-1}}{P_{p-1}} \left[ A_{n-1}(n-1, 0) + A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\cos u}{2 \cos u} \right. \\ \left. + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\cos 2u}{2^2 \cos^2 u} \dots \right],$$

Pour  $p = n - (2k+1)$ ,

$$C_p = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^n u} \frac{P_{n-1}}{P_{p-1}} \left[ A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\sin u}{2 \cos u} + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\sin 2u}{2^2 \cos^2 u} \dots \right],$$

$$(n-1, q) = (-1)^q \frac{1.3.5 \dots (n-1+q)}{1.2 \dots (n-1) 1.2 \dots q},$$

Pour  $\varepsilon \geq p-1$ ,

$$1.2 \dots \varepsilon A_\varepsilon = P_{p-1} \left[ S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon-p+1} + \frac{\varepsilon}{1} (n-1) S_{\varepsilon-2}^{\varepsilon-p} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{1.2} (n-1)(n-2) S_{\varepsilon-3}^{\varepsilon-p-1} \dots \right],$$

$$S_\mu^\lambda = (-1)^\mu \Pi_\lambda^\mu,$$

$\Pi_\lambda^\mu = \Sigma$  des produits  $\mu$  à  $\mu$  de  $1, 2, \dots, \lambda$ ;

5°  $x = \operatorname{tang} u$  :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} D_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour  $n+p=2k$ ,

$$D_p = (-1)^{p+k} 2^{n-p} \left[ S_{n-1}^{n-p} \cos^{2n} u + \frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1} \cos^{2n-1} u \frac{\cos u}{2} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2} \cos^{2n-2} u \frac{\cos 2u}{2^2} \dots \right],$$

Pour  $n+p=2k+1$ ,

$$D_p = (-1)^{p+k+1} 2^{n-p} \left[ \frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1} \cos^{2n-1} u \frac{\sin u}{2} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2} \cos^{2n-2} u \frac{\sin 2u}{2^2} \dots \right];$$

6°  $x = \operatorname{arc} \sin u$  :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} A_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$A_p = \sum_{1.2 \dots n} \frac{(\cos x)^{h_1}}{1.2 \dots h_1} \left( \frac{-\sin x}{1.2} \right)^{h_2} \left( \frac{-\cos x}{1.2.3} \right)^{h_3} \dots \left[ \frac{\sin \left( x + \alpha \frac{\pi}{2} \right)}{1.2 \dots \alpha} \right]^{h_\alpha},$$

$$h_1 + h_2 + \dots + h_\alpha = p,$$

$$h_1 + 2h_2 + \dots + \alpha h_\alpha = n;$$

7°  $x = \operatorname{arc} \operatorname{tang} u$  :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} G_\lambda \frac{d^\lambda y}{du^\lambda}.$$



Pour  $n + p = 2k$ ,

$$G_p = \sum_{\lambda=p}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda+k} \frac{2^n}{2^\lambda} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{\cos(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p} x}.$$

Pour  $n + p = 2k + 1$ ,

$$G_p = \sum_{\lambda=p}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda+k+1} \frac{2^n}{2^\lambda} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{\sin(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p} x}.$$

J'ai démontré très simplement que les cas de  $x = \cos u$ ,  $x = \cot u$ , ainsi que ceux de  $x = \arccos u$ ,  $x = \operatorname{arccot} u$  rentraient dans les cas précédents.

Tous les résultats annoncés étant obtenus par application directe et systématique des formules générales, je me bornerai à quelques observations générales avant de terminer ce trop long travail.

54. Avant d'aller plus loin, je ferai remarquer que, si l'on remplace  $x$  et  $u$  par les expressions plus générales  $ax + b$  et  $cu + d$ , les résultats précédents ne sont pas sensiblement changés. Toute explication vraie pour le premier cas subsiste pour le second. Cette observation est tellement évidente que je me bornerai à l'appliquer, sans en prévenir, quand l'occasion s'en présentera.

55. Le changement de la variable indépendante peut être employé en Analyse pour ramener certaines équations différentielles à d'autres plus simples.

Pour fixer les idées, je suppose qu'on veuille trouver des équations différentielles se ramenant aux équations linéaires à coefficients constants. Afin de découvrir le caractère particulier présenté par de pareilles équations, j'imaginerai que l'on veuille inversement repasser de l'équation à coefficients constants à l'équation à coefficients variables.

On part donc de

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = 0,$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$  étant des nombres arbitraires.

Si l'on effectue la substitution

$$x = Lu,$$

on a, en posant, pour abréger,  $\frac{\Delta^p \phi^n}{1.2 \dots p} = b_{np}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= b_{n1} u \frac{dy}{du} + b_{n2} u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + b_{nn} u^n \frac{d^n y}{du^n}, \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} &= b_{(n-1)1} u \frac{dy}{du} + b_{(n-1)2} u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + b_{(n-1),n-1} u^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{du^{n-1}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

On arrivera à

$$\begin{aligned} B_0 u^n \frac{d^n y}{du^n} + B_1 u^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{du^{n-1}} + \dots + B_n y &= 0, \\ B_p &= A_0 b_{np} + A_1 b_{n-1,p} + \dots + A_{n-p} b_{pp}. \end{aligned}$$

Les quantités  $A$  étant arbitraires, il est facile de voir qu'on peut en disposer de manière à donner aux coefficients  $B$  des valeurs quelconques.

Par suite, toute équation de la forme

$$A_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = 0$$

pourra être ramenée à une équation linéaire à coefficients constants par la substitution inverse

$$x = e^u.$$

On retrouve un résultat très connu qui s'énonce ordinairement ainsi. Désignant par  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des constantes, l'équation linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{A_1}{ax+b} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n} y = 0$$

se ramène à la forme à coefficients constants par la substitution

$$ax + b = e^u.$$

56. Cette propriété, très simple, tient donc à la forme particulière que prend la formule du changement de variable pour  $x = Lu$ ; tous les autres changements simples  $x = u^a, \dots$  sont visiblement incapables de donner le même résultat. Ils ne pourront ramener à avoir ses coef-

ficients constants qu'une équation linéaire satisfaisant à deux conditions. Premièrement elle doit rentrer dans un type donné. Deuxièmement ses coefficients numériques doivent vérifier certaines équations bien déterminées.

Par exemple, on a trouvé

$$x = u^\mu,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{u^\mu} \left[ b_{n,1} u \frac{dy}{du} + b_{n,2} u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \dots + b_{n,n} u^n \frac{d^n y}{du^n} \right].$$

Il en résulte que l'expression générale des équations qui se ramènent à l'équation linéaire à coefficients constants par la substitution

$$u = x^\mu$$

est

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_0}{x^{n\mu}} \left[ b_{nn} x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + b_{n1} x \frac{dy}{dx} \right] \\ & + \frac{\lambda_1}{x^{(n-1)\mu}} \left[ b_{n-1,n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots \right] + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{x^\mu} \left[ \frac{1}{\mu} x \frac{dy}{dx} \right] + \lambda_n y = 0. \end{aligned}$$

$b_{nn}, \dots$  étant des nombres dont nous avons trouvé l'expression générale;  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  étant  $n$  quantités arbitraires.

Si donc on a commencé par mettre partout en évidence  $\left(x \frac{dy}{dx}\right)$ ,  $\left(x^2 \frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ ,  $\dots$ ,  $\left(x^n \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ , le coefficient de  $\left(x^n \frac{d^n y}{dx^n}\right)$  sert à déterminer  $\mu$ ; les coefficients de  $\frac{1}{x^{n\mu}}$  dans les multiplicateurs de  $\left(x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$ ,  $\dots$ ,  $\left(x^2 \frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ ,  $\left(x \frac{dy}{dx}\right)$  doivent prendre des valeurs numériques déterminées, quand on aura pris arbitrairement le coefficient de  $\frac{1}{x^{n\mu}} \left(x^n \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ . Si maintenant on choisit arbitrairement le coefficient de  $\frac{1}{x^{(n-1)\mu}}$  dans un seul des  $(n-1)$  termes qui contiennent cette quantité, les coefficients seront déterminés dans les  $(n-2)$  autres termes. Continuant ainsi, on verrait qu'on ne peut prendre, une fois  $\mu$  déterminé, que  $n$  coefficients arbitraires, un pour  $\frac{1}{x^{n\mu}}$ , un pour  $\frac{1}{x^{(n-1)\mu}}$ ,  $\dots$ , et enfin un pour  $\frac{1}{x^\mu}$ .

Chacun des autres changements simples  $x = e^u$ ,  $x = \sin u$ ,  $\dots$  four-

nirait immédiatement un calcul analogue. Il est d'ailleurs inutile de récrire sous une autre forme des résultats connus.

57. Il semble, au premier abord, que la question n'ait guère avancé. Mais, si l'on réfléchit au résultat précédent, on s'aperçoit qu'on a gagné de ne plus être tenté d'essayer les substitutions élémentaires indiquées plus haut lorsque l'équation ne rentre pas dans un certain type facile à reconnaître.

Il resterait à calculer effectivement les coefficients numériques, relatifs aux changements élémentaires, pour les valeurs de  $n$  les plus simples, et à ramener une équation différentielle donnée à une autre du même degré déjà étudiée, linéaire ou non. Je laisserai de côté ce calcul, plutôt long que difficile, qui n'exige, d'ailleurs, la connaissance d'aucun résultat général, en me bornant à un exemple.

Si l'on a  $n = 2$ , l'équation

$$\frac{\lambda}{x^{2\mu}} \left[ b_{21} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b_{21} x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda_1}{x^\mu} x \frac{dy}{dx} + \lambda_2 y = f(x)$$

se transformera en une équation linéaire à coefficients constants par la substitution

$$u = x^\mu.$$

On vérifie facilement que cette équation peut s'écrire

$$A \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{B x^\mu - (\mu - 1) A}{x} \frac{dy}{dx} + C x^{2\mu-2} y = f_1(x),$$

en désignant par A, B, C trois paramètres constants.

D'une manière un peu plus générale, on peut dire que l'équation

$$A \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{B(ax+b)^\mu - Aa(\mu-1)}{ax+b} \frac{dy}{dx} + C(ax+b)^{2\mu-2} y = f(x),$$

où A, B, C sont des constantes, se ramènera à l'équation linéaire à coefficients constants par la substitution

$$u = (ax + b)^\mu.$$

On obtiendrait le même résultat avec la substitution un peu plus générale

$$cu + d = (ax + b)^\mu.$$

58. Enfin, si, sans s'occuper des applications, on veut arriver à des formules algébriques, difficiles à vérifier directement, rien n'est plus facile.

Je donnerai un seul exemple.

Nous avons trouvé, pour le cas de  $x = \cos u$ , les résultats suivants (n° 47) :

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum (-1)^p C_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour  $p = m - 2k$ ,

$$C_p = \frac{(-1)^k}{\sin^m u} \left[ B_0 + B_1 \frac{\sin u}{\sin u} - B_2 \frac{\cos 2u}{\sin^2 u} \dots \right].$$

Pour  $p = m - (2k + 1)$ ,

$$C_p = \frac{(-1)^{k+1}}{\sin^m u} \left[ B_1 \frac{\cos u}{\sin u} + B_2 \frac{\sin 2u}{\sin^2 u} \dots \right].$$

L'expression générale des coefficients B a été donnée explicitement.

Or, si l'on veut traiter le même changement de variable par le déterminant de Wronski, on obtient d'abord

$$\frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} d \cos u & d \cos^2 u & d \cos^3 u & \dots & d \cos^{m-1} u & dy \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^m \cos u & d^m \cos^2 u & d^m \cos^3 u & \dots & d^m \cos^{m-1} u & d^m y \end{vmatrix}}{1.1.2\dots 1.2\dots m (d \cos u)^{1+2+\dots+m}}.$$

Je rappellerai la formule

$$2^{n-1} \cos^n a = \cos na + \frac{n}{1} \cos(n-2)a + \dots$$

Remplaçant  $\cos^p u$  par cette valeur, il est évident que par des combinaisons de colonnes on se ramènera à

$$\frac{1}{1.2\dots m} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} d \cos u & d \cos 2u & \dots & d \cos(m-1)u & dy \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^m \cos u & d^m \cos 2u & \dots & d^m \cos(m-1)u & d^m y \end{vmatrix}}{2^{1+2+\dots+(m-2)} 1.1.2\dots 1.2\dots m (d \cos u)^{1+2+\dots+m}}.$$

Développant le déterminant suivant les éléments de la dernière

colonne, on aura

$$(-1)^{m+p} C_p = \frac{(-1)^{m+p} \begin{vmatrix} (\cos u)^{(1)} & \dots & [\cos(m-1)u]^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\cos u)^{(p-1)} & \dots & \dots \\ (\cos u)^{(p+1)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ (\cos u)^{(m)} & \dots & [\cos(m-1)u]^{(m)} \end{vmatrix}}{2^{\frac{(m-2)(m-1)}{2}} 1.2.1.2.3\dots 1.2\dots(m-1)(-\sin u)^{1+2+\dots+m}}.$$

On a donc obtenu explicitement le développement de déterminants à forme très symétrique suivant les multiples de  $\sin u$  et de  $\cos u$ .

59. L'exemple géométrique traité dans la deuxième Partie du Chapitre II (nos 28 et 29) montre qu'il y aurait de nombreux développements à obtenir si l'on s'adressait à la théorie des courbes gauches et à celle des surfaces. Je me borne à le rappeler au souvenir.

60. Je laisserai de côté tous les développements analogues aux précédents qu'il serait facile de tirer soit de l'Analyse pure, soit de ses applications géométriques.

Le but que je me suis proposé me paraît atteint. Non seulement des formules générales ont été indiquées; mais encore la plupart d'entre elles ont été appliquées à quelque exemple et toujours le calcul a été fait systématiquement jusqu'au bout. La possibilité d'utiliser les formules ne peut plus, dès lors, être mise en doute, et c'est ce que je tenais à établir.



---

SUR LE  
**THÉORÈME D'EISENSTEIN,**

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,  
ANCIEN PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COÏMBRE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
DE PORTO.

---

Extrait d'une Lettre à M. HERMITE.

---

Permettez que je vous présente une démonstration du théorème d'Eisenstein et du théorème plus général énoncé dans ma Lettre précédente. Elle est très élémentaire et je serais bien heureux si elle méritait votre haute approbation.

Soit  $y$  une fonction algébrique de  $x$  définie par l'équation à coefficients entiers

$$\sum A x^a y^b = 0.$$

Si l'on dérive cette équation  $n$  fois au moyen de la formule de Leibnitz, on trouve le résultat symbolique

$$\sum A (x^a + y^b)^{(n)} = 0.$$

En remarquant maintenant que les dérivées de  $x^a$  d'ordre supérieur à  $a$  sont nulles, que les dérivées d'ordre inférieur à  $a$  s'annulent pour  $x = 0$  et que la dérivée d'ordre  $a$  est  $1.2 \dots a$ , il vient

$$\sum A n(n-1) \dots (n-a+1) (y^b)^{(n-a)}_{x=0} = 0.$$

En appliquant une autre fois la formule de Leibnitz au produit  $y^b$ ,

cette équation mène au résultat symbolique

$$\sum A n(n-1) \dots (n-a+1) S \frac{1.2 \dots (n-a) \gamma_0^{(\alpha)} \gamma_0^{(\beta)} \dots \gamma_0^{(\lambda)}}{1.2 \dots \alpha \times 1.2 \dots \beta \times \dots \times 1.2 \dots \lambda} = 0,$$

où S représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = n - a,$$

et où le nombre des quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  est égal à  $b$ .

Si l'on sépare maintenant dans cette équation les termes qui contiennent la dérivée  $\gamma_0^{(n)}$ , on trouve un résultat de la forme suivante

$$\sum A S \frac{\gamma_0^{(\alpha)}}{1.2 \dots \alpha} \frac{\gamma_0^{(\beta)}}{1.2 \dots \beta} \dots \frac{\gamma_0^{(\lambda)}}{1.2 \dots \lambda} + \sum A b \gamma_0^{b-1} \frac{\gamma_0^{(n)}}{1.2 \dots n} = 0;$$

d'où résulte

$$\frac{\gamma_0^{(n)}}{1.2 \dots n} = - \frac{\sum A S \frac{\gamma_0^{(\alpha)}}{1.2 \dots \alpha} \dots \frac{\gamma_0^{(\lambda)}}{1.2 \dots \lambda}}{\sum A b \gamma_0^{b-1}}.$$

De cette formule on tire les conclusions suivantes :

I. Si une fonction, définie d'une manière quelconque, qui prend une valeur rationnelle  $\gamma_0$  pour  $x = 0$ , satisfait à une équation algébrique à coefficients entiers, le dénominateur de  $\frac{\gamma_0^{(n)}}{1.2 \dots n}$  ne peut pas contenir des facteurs premiers différents de ceux qui entrent dans les dénominateurs de  $\frac{\gamma_0^{(n-1)}}{1.2 \dots n-1}$ ,  $\frac{\gamma_0^{(n-2)}}{1.2 \dots n-2}$ , ... et de ceux qui entrent dans le numérateur de  $\sum A b \gamma_0^{b-1}$ , et le nombre de ces facteurs est par conséquent limité.

II. Le théorème précédent contient le théorème d'Eisenstein. Alors la fonction  $\gamma$  est définie par une série ordonnée suivant les puissances de  $x$ .





---

SUR LES SOLUTIONS RÉGULIÈRES  
D'UN  
SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. L. SAUVAGE,  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

---

I. Dans son Mémoire fondamental sur les équations différentielles linéaires et homogènes (<sup>1</sup>), M. Fuchs démontre le théorème suivant :

*L'équation différentielle linéaire*

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m} y,$$

où les fonctions  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ , ...,  $P_m(x)$  sont des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point  $a$ , admet dans le domaine de ce point un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent finis pour  $x = a$  quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de  $x - a$ .

Les intégrales de ce système fondamental peuvent être mises sous la forme

$$F = \{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \dots + \varphi_n [\log(x-a)]^n \} (x-a)^r,$$

où  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ , ...,  $\varphi_n$  sont des fonctions uniformes de  $x$  dans le domaine du point  $a$ , et qui sont infinies d'ordre fini pour  $x = a$ . M. Thomé appelle ces fonctions des *expressions régulières*; nous adopterons cette dénomination.

---

(<sup>1</sup>) *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121. Voir la Thèse de M. Tannery.

Le but de ce Mémoire est de généraliser le théorème précédent en l'appliquant aux systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(x - x_0) \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \dots + a_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les coefficients  $a$  sont des fonctions holomorphes dans le domaine du point  $x_0$ . Nous nous proposons de montrer que *toutes les solutions* de ce système peuvent être composées linéairement avec des expressions régulières dans le domaine du point  $x_0$ . Nous verrons, de plus, que ce système d'équations n'est pas le seul qui jouisse de cette propriété importante.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons le point  $x_0$  ramené à l'origine et nous considérerons le système

$$(1) \quad x \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \dots + a_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2. Nous démontrerons d'abord que le système (1) admet au moins une solution dont les éléments sont de la forme

$$(2) \quad x^r \varphi_1, \quad x^r \varphi_2, \quad \dots, \quad x^r \varphi_n,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  étant des fonctions uniformes et continues dans le domaine de l'origine, développables en séries à coefficients constants de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_i = \varphi_{i0} + x \varphi_{i1} + x^2 \varphi_{i2} + \dots + x^\mu \varphi_{i\mu} + \dots \\ (i = 1, 2, \dots, n; \mu = 0, 1, 2, \dots, \infty). \end{cases}$$

Il nous suffira de montrer qu'on peut déterminer le nombre  $r$  et les coefficients des séries (3) de manière que ces séries soient convergentes et que les expressions (3) satisfassent au système d'équations (1).

Posons donc

$$y = x^r \varphi,$$

nous aurons

$$x \frac{dy}{dx} = x^r \left( x \frac{d\varphi}{dx} + r \varphi \right).$$

En substituant dans le système proposé (1) ces valeurs des fonctions  $y$  et de leurs dérivées  $\frac{dy}{dx}$ , et en divisant par  $x^r$ , on obtient les équations

$$(4) \quad x \frac{d\varphi_i}{dx} = a_{i1}\varphi_1 + \dots + (a_{ii} - r)\varphi_i + \dots + a_{in}\varphi_n \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Posons maintenant

$$(5) \quad \begin{cases} a_{ik} = a_{ik}^0 + x a_{ik}^1 + \dots + x^\mu a_{ik}^\mu + \dots \\ (i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, n; \mu=0, 1, 2, \dots, \infty). \end{cases}$$

Les séries (5) à coefficients constants représentent dans un certain domaine de l'origine les fonctions  $a_{ik}$ .

Le système (4) devra être rendu identique quand on aura remplacé les coefficients et les inconnues par les séries correspondantes. On aura comme première condition d'identité

$$F(r) = \begin{vmatrix} a_{11}^0 - r & a_{12}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r & \dots & a_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \dots & a_{nn}^0 - r \end{vmatrix} = 0.$$

Il résulte de là que le nombre  $r$  ne pourra être que l'une des racines de l'équation algébrique de degré  $n$

$$F(r) = 0.$$

Par analogie avec le théorème de M. Fuchs, nous appellerons cette équation l'équation fondamentale déterminante relative au point  $x = 0$ .

3. Soient  $r_1, r_2, \dots, r_n$  les  $n$  racines de l'équation fondamentale déterminante, rangées de manière qu'aucune des quantités  $r_2 - r_1 - 1, r_3 - r_1 - 1, \dots, r_n - r_1 - 1$  ne soit nulle ou égale à un entier positif. Cette condition sera remplie si les parties réelles ne vont jamais en croissant quand on passe d'une racine à la suivante. La quantité  $r_1 + k$ , quelle que soit la valeur du nombre entier et positif  $k$ , n'annulera jamais  $F(r)$ .



qu'on le voudra, pourvu qu'on laisse de côté les premiers termes  $a_{ij}^0$  pour lesquels  $\mu = 0$ .

Écrivons le système (6) sous la forme

$$a_{i_1}^0 \varphi_{1k} + \dots + (a_{i_l}^0 - r - k) \varphi_{lk} + \dots + a_{i_n}^0 \varphi_{nk} = G_i$$

**en posant**

$$-G_i = a_{i1}^1 \varphi_{1, k-1} + \dots + a_{in}^k \varphi_{n0} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tirons de ces équations la valeur de l'une quelconque des inconnues  $\varphi$ , nous aurons

$$\varphi_{sk} \mathbf{F}(r+k) = \Delta_1 \mathbf{G}_1 + \Delta_2 \mathbf{G}_2 + \dots + \Delta_n \mathbf{G}_n,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  représentant des déterminants mineurs du premier ordre du déterminant  $F(r+k)$ .

On peut écrire cette équation

$$F(r+k)\varphi\rho^k = \Delta_1 G_1 \rho^k + \dots + \Delta_n G_n \rho^k.$$

**Or nous aurons**

[illegible]

Un terme quelconque de cette somme est de la forme  $a_{ij}^{\mu} \rho^{\mu} \cdot \varphi_{j, k-\mu} \rho^{k-\mu}$ , et  $\mu$  sera au moins égal à 1.

Appelons  $\alpha_{ij}^\mu$  et  $\psi_{j,k-\mu}$  les modules de  $a_{ij}^\mu \rho^\mu$  et de  $\varphi_{j,k-\mu} \varphi^{k-\mu}$ . Le module de  $G_i \rho^k$  sera inférieur à la somme

$$\Sigma \alpha_{ij}^{\mu} \psi_{j, k-\mu} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n; \mu=1, 2, \dots, k).$$

Mais, pour une valeur donnée de  $\rho$ , et pour  $\mu > 0$ , les modules  $\alpha_{ij}^{\mu}$  ont une valeur maximum  $\alpha$ . De plus, pour les valeurs de  $\mu$  de 1 à  $k$ , l'une des quantités  $\psi_{j, k-\mu}$  est plus grande que les autres; désignons-la par  $\psi$ .

Le nombre des termes de la somme étant  $nk$ , le module de la somme  $G_i \rho^k$  sera inférieur à  $nk\alpha\psi$ .

Appelons maintenant  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  les modules des déterminants  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , le module de la somme

$$\Delta_1 G_1 \rho^k + \dots + \Delta_n G_n \rho^k$$

sera inférieur à

$$nk\alpha\psi(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n).$$

Appelons de même  $\delta$  le module de  $F(r+k)$ , on aura pour le module  $\psi_k$  de  $\varphi \rho^k$

$$\psi_k < n\alpha\psi \left( \frac{k\delta_1}{\delta} + \frac{k\delta_2}{\delta} + \dots + \frac{k\delta_n}{\delta} \right).$$

Mais  $\frac{k\delta_i}{\delta}$  est le module de la fraction  $\frac{k\Delta_i}{F(r+k)}$ .

Les deux termes étant du  $n^{\text{ième}}$  degré en  $k$ , on peut prendre  $k$  assez grand pour que, à partir de cette valeur de  $k$  et pour toutes les valeurs de  $k$  plus grandes, le module de la fraction diffère de sa limite  $l_i$  d'une quantité  $\varepsilon_i$  aussi petite qu'on voudra, et que ce module s'approche constamment de sa limite quand  $k$  augmente indéfiniment.

On aura alors, pour cette valeur de  $k$ ,

$$\psi_k < n\alpha\psi(l_1 + l_2 + \dots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n).$$

Soit  $L$  la plus grande valeur de la parenthèse obtenue en prenant tous les  $\varepsilon$  positifs, on aura

$$\psi_k < n\alpha\psi L.$$

Cela posé, on peut prendre  $\rho$  assez petit pour que  $n\alpha L$  soit un nombre plus petit que l'unité. En effet, on peut prendre  $\rho$  assez petit pour que  $\alpha$  soit rendu aussi petit que l'on voudra. On aura alors, pour cette valeur de  $\rho$  et pour toute valeur plus petite,

$$\psi_k < \frac{\psi}{\rho},$$

$\rho$  étant un nombre plus grand que l'unité.

Si, ensuite, on remplace  $k$  par  $k + 1$ ,  $k + 2$ , ..., on ne pourra pas augmenter la valeur de  $L$ , et, par suite, celle de  $n\alpha L$  ou de  $\frac{1}{p}$ . On aura donc

$$\psi_{k+k'} < \frac{1}{p} \quad (k' = 1, 2, \dots, \infty).$$

Il résulte de là que les modules des termes des séries  $\varphi$  seront, à partir d'un certain rang, moindres qu'un nombre déterminé pour toute valeur de  $x$  dont le module sera au plus égal à  $\rho$ . Les séries  $\varphi$  seront donc convergentes à l'intérieur du cercle de rayon  $\rho$  ayant son centre à l'origine.

Il est donc démontré que le système

$$(1) \quad x \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \dots + a_{in} y_n$$

admet au moins une solution dont les éléments  $x^r \varphi_1$ ,  $x^r \varphi_2$ , ...,  $x^r \varphi_n$  soient des expressions régulières. Nous dirons qu'une *telle solution est régulière*. Il nous reste à faire voir que le système (1) admet  $n$  solutions régulières formant un *système fondamental* de solutions. Il sera ainsi prouvé que le système (1) n'est satisfait que par des *solutions régulières* ou par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants de ces *solutions régulières*. Nous dirons que ces combinaisons sont aussi des solutions régulières.

5. Lorsqu'une fonction de la forme

$$F = [\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \dots + \varphi_n (\log x)^n] x^r$$

reste finie pour  $x = 0$  quand on l'a multipliée par une puissance convenable de  $x$ , il y a un exposant  $\alpha$  tel que le produit  $x^\alpha F$  est différent de zéro pour  $x = 0$  et n'est infini que comme une fonction

$$\alpha + \beta \log x + \dots + \lambda (\log x)^n$$

entière en  $\log x$  et à coefficients constants. En nous servant de l'expression de M. Fuchs, nous dirons que *la fonction F appartient à l'exposant  $\alpha$* .

Les diverses intégrales  $x^{r_1}\varphi_1, x^{r_2}\varphi_2, \dots, x^{r_n}\varphi_n$  qui composent une solution du système (1) pourront appartenir à des exposants différents. Nous mettrons ces exposants en évidence par la notation

$$x^{r_1+h_1}\varphi_1, x^{r_2+h_2}\varphi_2, \dots, x^{r_n+h_n}\varphi_n,$$

où  $h_1, h_2, \dots, h_n$  représentent des nombres entiers. Mais, pour  $x = 0$ , les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  seront *toutes* différentes de zéro.

Cependant plusieurs éléments de la solution peuvent être identiquement nuls, et il n'y a pas lieu alors de parler des exposants auxquels ils pourraient appartenir.

6. Soient

$$u_i = x^{r_i+h_i}\varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les éléments d'une solution régulière du système d'équations (1). Supposons que les fonctions  $\varphi_{s+k}$  soient identiquement nulles pour  $k = 1, 2, \dots, n - s$ , mais que les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$  soient *toutes* différentes de zéro pour  $x = 0$ .

Posons  $y_i = u_i q_i$  en convenant de remplacer  $u_{s+k}$  par  $x^r$ , et soit, pour simplifier l'écriture,  $y' = \frac{dy}{dx}$ . Nous aurons

$$xy'_i = x u'_i q_i + x u_i q'_i$$

et, par suite,

$$x q'_i = a_{i1} \frac{u_1}{u_i} q_1 + \dots + \left( a_{ii} - x \frac{u'_i}{u_i} \right) q_i + \dots + a_{in} \frac{u_n}{u_i} q_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ce système d'équations admet la solution

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = \dots = q_s = 1, \\ q_{s+k} &= q_{s+k+1} = \dots = q_n = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$a_{i1} \frac{u_1}{u_i} + \dots + a_{is} \frac{u_s}{u_i} = 0.$$



En tenant compte de ces relations, nous aurons

$$xq'_i = a_{i2} \frac{u_2}{u_i} (q_2 - q_1) + \dots + a_{is} \frac{u_s}{u_i} (q_s - q_1) \\ + a_{i,s+1} \frac{u_{s+1}}{u_i} q_{s+1} + \dots + a_{in} \frac{u_n}{u_i} q_n.$$

Posons maintenant

$$q_k - q_1 = z_k \quad (k = 1, 2, \dots, s), \\ q_{s+k'} = z_{s+k'} \quad (k' = 1, 2, \dots, n-s),$$

nous aurons, en retranchant la première équation des  $n-s$  suivantes :

$$xz'_k = \left( a_{k2} \frac{u_2}{u_k} - a_{12} \frac{u_2}{u_1} \right) z_2 + \dots + \left( a_{kk} - x \frac{u'_k}{u_k} - a_{1k} \frac{u_k}{u_1} \right) z_k + \dots \\ + \left( a_{k,s+1} \frac{u_{s+1}}{u_k} - a_{1,s+1} \frac{u_{s+1}}{u_1} \right) z_{s+1} + \dots + \left( a_{kn} \frac{u_n}{u_k} - a_{1n} \frac{u_n}{u_1} \right) z_n, \\ xz'_{s+k'} = a_{s+k',2} \frac{u_2}{u_{s+k'}} z_2 + \dots + \left( a_{s+k',s+k'} - x \frac{u'_{s+k'}}{u_{s+k'}} \right) z_{s+k'} + \dots + a_{s+k',n} \frac{u_n}{u_{s+k'}} z_n \\ (k = 2, 3, \dots, s; k' = 1, 2, \dots, n-s).$$

Introduisons maintenant dans le calcul les valeurs

$$u_i = x^{r+h_i} \varphi_i.$$

Nous aurons

$$\frac{u_k}{u_i} = x^{h_k-h_i} \frac{\varphi_k}{\varphi_i}, \\ \frac{x u'_i}{u_i} = r + h_i + x \frac{\varphi'_i}{\varphi_i},$$

et, par suite,

$$a_{k2} \frac{u_2}{u_k} - a_{12} \frac{u_2}{u_1} = a_{k2} \frac{\varphi_2}{\varphi_k} x^{h_2-h_k} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} x^{h_2-h_1}, \\ a_{kk} - x \frac{u'_k}{u_k} - a_{1k} \frac{u_k}{u_1} = a_{kk} - r - h_k - a_{1k} \frac{\varphi_k}{\varphi_1} x^{h_k-h_1}, \\ a_{s+k',k} \frac{u_k}{u_{s+k'}} = a_{s+k',k} \varphi_k x^{h_k} \quad \text{ou} \quad a_{s+k',k_1} \frac{u_{k_1}}{u_{s+k'}} = a_{s+k',k_1},$$

suivant les cas, et

$$a_{s+k', s+k'} - x \frac{u'_{s+k'}}{u_{s+k'}} = a_{s+k', s+k'} - r.$$

Le système d'équations en  $z$  deviendra

$$\begin{aligned} xz'_k &= \left( a_{k2} \frac{\varphi_2}{\varphi_k} x^{h_2-h_1} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} x^{h_2-h_1} \right) z_2 + \dots \\ &+ \left( a_{kk} - r - h_k - a_{1k} \frac{\varphi_k}{\varphi_1} x^{h_k-h_1} \right) z_k + \dots \\ &+ \left( a_{k, s+1} \frac{1}{\varphi_k} x^{-h_1} - a_{1, s+1} \frac{1}{\varphi_1} x^{-h_1} \right) z_{s+1} + \dots \\ &+ \left( a_{kn} \frac{1}{\varphi_k} x^{-h_1} - a_{1n} \frac{1}{\varphi_1} x^{-h_1} \right) z_n, \\ xz'_{s+k} &= a_{s+k', 2} \varphi_2 x^{h_2} z_2 + \dots + (a_{s+k', s+k'} - r) z_{s+k'} + \dots + a_{s+k', n} z_n. \end{aligned}$$

Changeons encore une fois de variables, et posons

$$z_p = x^{-h_p} v_p \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

nous aurons, pour  $p = 1, 2, \dots, s$ ,

$$xz'_p = -h_p x^{-h_p} v_p + x^{-h_{p+1}} v_p$$

et, pour  $p = s+1, s+2, \dots, n$ ,

$$xz'_{s+k} = x v'_{p+k}.$$

Remarquons, en outre, que, d'après la manière dont on calcule les séries  $\varphi$  au n° 3, l'une au moins de ces séries est différente de zéro pour  $x = 0$ , de sorte qu'on peut supposer, par exemple,  $h_1$  nul et  $h_2, h_3, \dots, h_s$  positifs. On est ainsi conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} x v'_k \frac{1}{x^{h_k}} &= \left( a_{k2} \frac{\varphi_2}{\varphi_k} \frac{x^{h_2}}{x^{h_k}} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} x^{h_2} \right) x^{-h_1} v_2 + \dots \\ &+ \left( a_{kk} - r - h_k - a_{1k} \frac{\varphi_k}{\varphi_1} x^{h_k} \right) x^{-h_1} v_k + \dots \\ &+ \left( a_{kn} \frac{1}{\varphi_k} \frac{1}{x^{h_k}} - a_{1, s+1} \frac{1}{\varphi_1} \right) v_n, \\ x v'_{s+k} &= a_{s+k', 2} \varphi_2 v_2 + \dots + (a_{s+k', s+k'} - r) v_{s+k'} + \dots + a_{s+k', n} v_n, \end{aligned}$$

ou, plus simplement, au système

$$(7) \begin{cases} x v'_k = \left( a_{k2} \frac{\varphi_2}{\varphi_k} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} x^{h_k} \right) v_2 + \dots \\ \quad + \left( a_{kk} - r - h_k - a_{1k} \frac{\varphi_k}{\varphi_1} x^{h_k} \right) v_k + \dots + \left( a_{kn} \frac{1}{\varphi_k} - a_{1n} \frac{1}{\varphi_1} x^{h_k} \right) v_n, \\ x v'_{s+k'} = a_{s+k',2} \varphi_2 v_2 + \dots + (a_{s+k',s+k'} - r) v_{s+k'} + \dots + a_{s+k',n} \varphi_n v_n, \\ \quad (k = 1, 2, \dots, s; \quad k' = 1, 2, \dots, n-s). \end{cases}$$

Pour  $x = 0$ , les coefficients  $a_{ij}$  se réduisent à des valeurs  $a_{ij}^0$  qui ne sont pas toutes nulles. Les séries  $\varphi_k$  se réduisent à des valeurs  $\varphi_{k0}$  dont aucune n'est nulle. Il en résulte que le système (7) est de même nature que le système (1); mais il a une inconnue de moins.

Ce système (7) admet une solution régulière en  $v_2, v_3, \dots, v_n$ . Par suite, le système en

$$z_p = x^{-h_p} v_p \quad (p = 2, 3, \dots, n)$$

admet une solution régulière en  $z_2, z_3, \dots, z_n$ .

Remontons au système en  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Nous aurons d'abord

$$x q'_1 = (a_{11} - r) q_1 + a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} x^{h_1} q_2 + \dots + a_{1n} \frac{1}{\varphi_1} q_n,$$

ou, à cause de la solution

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = \dots = q_s = 1, \\ q_{s+1} &= q_{s+2} = \dots = q_n = 0, \\ x q'_1 &= a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} x^{h_1} z_2 + \dots + a_{1n} \frac{1}{\varphi_1} z_n. \end{aligned}$$

Le second membre est une expression régulière. Soit  $H$  cette expression.  $\frac{H}{x}$  sera de même une expression régulière, soit  $H_1$ . En intégrant l'équation  $q'_1 = H_1$ , on aura pour  $q_1$  une expression régulière.

Cela posé, on a

$$\begin{aligned} q_k &= z_k + q_1 \quad (k = 1, 2, \dots, s), \\ q_{s+k'} &= z_{s+k'} \quad (k' = 1, 2, \dots, n-s). \end{aligned}$$

On voit donc que  $q_2, q_3, \dots, q_n$  seront, comme  $q_1$ , des expressions régulières.

Enfin, on a posé  $y_i = u_i q_i$ ,  $u_i$  et  $q_i$  étant des expressions régulières,  $y_i$  sera aussi une expression régulière, et la solution  $y_1, y_2, \dots, y_n$  du système (1) sera régulière.

Il est donc prouvé que le système d'équations (1) admet deux solutions régulières.

En ramenant le système (7) à un système (7') de même forme et renfermant encore une inconnue de moins, et en continuant ainsi, on arrivera à démontrer que le système d'équations (1) admet  $n$  solutions régulières.

On sait, par les théories générales (1), que les  $n$  solutions régulières ainsi obtenues forment un système fondamental de solutions des équations (1). Il en résulte que toute solution du système (1) est régulière: c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

7. Le théorème précédent s'étend sans difficulté aux équations de la forme

$$dy_i = (a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n) \frac{dx_1}{x_1} + \dots + (l_{i1}y_1 + \dots + l_{in}y_n) \frac{dx_p}{x_p},$$

où les coefficients  $a, b, \dots, l$  représentent des fonctions holomorphes dans un domaine du point  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_p = 0$ .

J'ai entrepris l'étude générale des équations de ce genre sur les conseils de M. Appell. Le Mémoire actuel est la suite naturelle des Mémoires que j'ai déjà publiés sur ce sujet. Qu'il me soit permis de remercier ici M. Appell des marques d'amitié qu'il m'a prodiguées en s'intéressant à mes recherches.

8. Les calculs que nous venons de faire prouvent que les systèmes d'équations de la forme (1) ne sont pas les seuls dont toutes les solutions soient régulières.

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 33; février 1882.

Posons  $y_i = x^{h_i} u_i$ , et substituons ces valeurs dans le système (1), nous obtiendrons le système

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dx} = \frac{a_{11} - h_1}{x} u_1 + \frac{a_{12}}{x^{h_1 - h_2 + 1}} u_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{x^{h_1 - h_n + 1}} u_n, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{du_i}{dx} = \frac{a_{i1}}{x^{h_i - h_1 + 1}} u_1 + \dots + \frac{a_{ii} - h_i}{x} u_i + \dots + \frac{a_{in}}{x^{h_i - h_n + 1}} u_n, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{du_n}{dx} = \frac{a_{n1}}{x^{h_n - h_1 + 1}} u_1 + \dots + \frac{a_{nn} - h_n}{x} u_n. \end{cases}$$

En posant réciproquement  $u_i = y_i x^{-h_i}$ , nous obtiendrons le système (1).

Le système (8) a donc toutes ses solutions régulières.

On obtient facilement, comme cas particulier du système (8), le système

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{a_{11} + 1}{x} u_1 + \frac{a_{12}}{x^2} u_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{x^n} u_n, \\ \frac{du_2}{dx} &= u_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{du_i}{dx} &= u_{i-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{du_n}{dx} &= u_{n-1}. \end{aligned}$$

De ce système on déduit facilement

$$\frac{d^n u_n}{dx^n} = \frac{a_{11} + 1}{x} \frac{d^{n-1} u_n}{dx^{n-1}} + \frac{a_{12}}{x^2} \frac{d^{n-2} u_n}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{1n}}{x^n} u_n.$$

On voit ainsi que  $u_n$  satisfait à une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre  $n$ .

On peut réciproquement passer de cette équation différentielle au système d'équations précédent. Ainsi le théorème de M. Fuchs n'est qu'un cas particulier du théorème général que nous avons démontré.

9. La question, telle que nous l'avons posée, est résolue. Mais elle en entraîne une autre : déterminer toutes les formes des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes, pour lesquelles les solutions soient toutes régulières. Nous nous proposons de traiter cette seconde Partie dans un autre Mémoire. En outre, la question que nous venons de traiter donne lieu à plusieurs conséquences importantes que nous nous proposons d'indiquer ainsi en dehors de ce Mémoire.



---

MÉMOIRE  
SUR UNE  
TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE GÉNÉRALE  
DONT UN CAS PARTICULIER  
EST APPLICABLE A LA CINÉMATIQUE,  
PAR M. ED. DEWULF,  
COLONEL DU GÉNIE.

---

La théorie des mouvements plans a été souvent étudiée, tant au point de vue géométrique qu'à celui de la cinématique; nous les rattachons ici aux théories de la Géométrie projective. Cette route nouvelle, si nous ne nous trompons, conduit à des conséquences qui n'ont pas encore été rencontrées. La plus digne d'intérêt est celle qui permet de construire le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe au moyen de deux cônes faciles à définir.

1. Soient deux plans superposés  $P$  et  $P'$ ; désignons les points du plan  $P$  par  $M$ , ceux du plan  $P'$  par  $M'$ ; enfin soit  $O$  un point fixe commun aux deux plans. Nous établissons la correspondance entre les deux plans  $P$  et  $P'$  de la manière suivante : deux points correspondants  $M$  et  $M'$  sont sur une même droite passant par le point fixe  $O$  et forment sur cette droite deux divisions projectives dont les points doubles se confondent en  $O$ . Le point  $M'$ , qui correspond à un point quelconque  $M$ , sera entièrement déterminé si l'on connaît sur chaque droite issue du point  $O$  un couple de points correspondants.

Imaginons une courbe  $\phi'_n$ , d'ordre  $n$ , ayant un point multiple d'ordre  $n - 1$  au point  $O$ ; une droite quelconque issue de  $O$  coupera  $\phi'_n$  en un

seul point  $M'$ . Supposons que ce point  $M'$  de  $\varphi'_n$  corresponde au point  $M$  situé à l'infini sur la droite  $OM'$ . En d'autres termes, admettons que les points  $\mu'$  de la courbe  $\varphi'_n$  correspondent aux points de la droite à l'infini du plan  $P$ .

Nous supposerons d'abord que les tangentes en  $O$  à la courbe  $\varphi'_n$  sont réelles et distinctes; les autres cas se déduiront de celui-là.

2. Considérons une droite quelconque  $l$  du plan  $P$  et cherchons le lieu géométrique des points du plan  $P'$  qui correspondent à ceux de  $l$ .

La droite  $l$  coupe  $\varphi'_n$  en  $n$  points, donc le lieu cherché ( $l'$ ) coupe la droite de l'infini en  $n$  points; c'est donc une courbe de l'ordre  $n$ . Une droite quelconque, passant par  $O$ , coupe  $l$  en un seul point, auquel correspond un seul point du plan  $P'$ ; donc la courbe ( $l'$ ) a un point multiple de l'ordre  $n - 1$  en  $O$ .

Une des tangentes  $o$  à la courbe  $\varphi'_n$  au point  $O$  coupe  $l$  au point  $lo$ , auquel correspond dans  $P'$  un point de la droite  $o$  infiniment voisin de  $O$ . Donc, les  $n - 1$  branches de ( $l'$ ) qui passent au point  $O$  y sont tangentes respectivement aux  $n - 1$  branches de  $\varphi'_n$ .

Soit  $o_1$  une droite passant par  $O$  et infiniment voisine d'une tangente à  $\varphi'_n$ , elle coupera  $l$  au point  $M_1$ . Nommons  $M'_1$  le point de  $P'$  qui correspond à  $M_1$ . Soit, en outre,  $\mu'_1$  le point infiniment voisin de  $O$  où la droite  $o_1$  coupe  $\varphi'_n$ , on aura, comme l'on sait,

$$\frac{1}{OM'_1} - \frac{1}{OM_1} = \frac{1}{O\mu'_1},$$

d'où

$$OM'_1 - o\mu'_1 = - \frac{\overline{o\mu'_1}^2}{OM_1 + o\mu'_1}.$$

La différence  $OM'_1 - o\mu'_1$  est donc un infiniment petit du second ordre; donc, chacune des branches de ( $l'$ ) qui passe par le point  $O$  y oscule une branche de  $\varphi'_n$ .

Ainsi :

*A une droite quelconque  $l$  du plan  $P$  correspond, sur  $P'$ , une courbe  $F'_n$ , d'ordre  $n$ , ayant au point  $O$  un point multiple d'ordre  $n - 1$  et chacune des branches de  $F'_n$  oscule en  $O$  une des branches de  $\varphi'_n$ .*

Nous avons vu que, dans la transformation qui nous occupe, à un



point quelconque  $M$  situé sur une des tangentes en  $O$  à  $\varphi'_n$  correspond toujours un point infiniment voisin de  $O$ . Cette remarque nous sera fréquemment utile dans la suite.

Une droite  $l$  étant donnée, nous connaissons : 1° un point d'ordre  $n - 1$ ; 2°  $2(n - 1)$  points simples; c'est-à-dire  $\frac{n(n+3)}{2} - 2$  points de la courbe  $F'_n$  qui sont indépendants de la position particulière de  $l$ . Si nous ajoutons à ces  $\frac{n(n+3)}{2} - 2$  points fixes deux points qui correspondent à deux des points de  $l$ , nous voyons que la courbe  $F'_n$  est entièrement déterminée. En d'autres termes :

*Au réseau des droites du plan  $P$  correspond, dans  $P'$ , un réseau de courbes d'ordre  $n$ . La base de ce réseau est formée par le point  $O^{n-1}$  d'ordre  $n - 1$  et les  $2(n - 1)$  points simples situés, deux à deux, sur les  $n - 1$  branches de  $\varphi'_n$  et infiniment voisins de  $O$ .*

La correspondance entre les deux plans est birationnelle et de l'ordre  $n$ , et les points fondamentaux du plan  $P'$  sont  $O^{n-1}$  et les  $2(n - 1)$  points de  $\varphi'_n$  que nous venons de signaler.

3. Considérons maintenant la droite à l'infini du plan  $P'$ , et cherchons le point  $\mu$  de  $P$  qui correspond au point à l'infini de  $P'$  situé sur une droite  $o'$  passant par  $O$ . On sait que  $o\mu = -o\mu'$ ,  $\mu'$  désignant, comme plus haut, le point d'intersection de  $o'$  avec  $\varphi'_n$ . Donc :

*La courbe  $\varphi_n$  qui correspond, dans le plan  $P$ , à la droite à l'infini de  $P'$ , est une courbe symétrique de la courbe  $\varphi'_n$  par rapport au point  $O$ .*

Donc aussi :

*Les points fondamentaux du plan  $P$  sont  $O^{n-1}$  et les  $2(n - 1)$  points symétriques par rapport à  $O$  des points fondamentaux simples du plan  $P'$ .*

Les courbes fondamentales du plan  $P$  sont : une courbe de l'ordre  $n - 1$ , ayant en  $O$  un point multiple de l'ordre  $n - 2$ , passant par les  $2(n - 1)$  points fondamentaux simples du plan  $P'$  et les  $n - 1$  tangentes en  $O$  à  $\varphi_n$ . Les droites fondamentales du plan  $P'$  se confondent avec celles du plan  $P$ .

4. D'après la théorie générale des transformations, on sait que :

*A une courbe quelconque  $F_m$ , de l'ordre  $m$ , du plan  $P$ , correspond dans  $P'$ , une courbe  $F'_{mn}$  de l'ordre  $mn$ , ayant en  $O$  un point multiple de l'ordre  $m(n-1)$  et des points de l'ordre  $m$  en chacun des autres points fondamentaux de  $P'$ .*

Enfin, si la courbe  $F_m$  du plan  $P$  passe  $r$  fois au point  $O$ , la courbe correspondante de  $P'$  contiendra  $r$  fois la courbe fondamentale d'ordre  $n-1$  du plan  $P'$ . Si, en outre, la courbe  $F_m$  est  $s$  fois tangente en  $O$  aux branches de  $\varphi'_n$ , la courbe correspondante se décomposera en  $r$  fois la courbe fondamentale d'ordre  $n-1$ ,  $s$  droites passant par  $O$  et une courbe de l'ordre  $mn - r(n-1) - s$ .

5. Désignons par  $a$  une droite passant par le point  $O$  et par un des points à l'infini de  $\varphi'_n$ , nommons ce dernier point  $M'$ . Le point  $M$ , du plan  $P$ , situé à l'infini sur la droite  $a$ , se confond avec le point  $M'$  qui lui correspond dans  $P'$ . Les divisions projectives situées sur la droite  $a$  ont donc trois couples de points correspondants qui se confondent; donc :

*Si l'on mène par le point  $O$  des parallèles aux  $n$  asymptotes de la courbe  $\varphi'_n$ , ce faisceau de  $n$  droites formera le lieu géométrique des points doubles de la transformation.*

6. Considérons de nouveau une droite quelconque  $l$  du plan  $P$ , et nommons  $\mu$  un de ses points d'intersection avec la courbe  $\varphi_n$ . Au point  $\mu$  correspond le point à l'infini de  $P'$  situé sur la droite  $O\mu$ . Donc :

*Si l'on joint le point  $O$  aux  $n$  points d'intersection d'une droite  $l$  et de la courbe  $\varphi_n$ , on aura les  $n$  parallèles aux asymptotes de la courbe qui, dans  $P'$ , correspond à la droite  $l$ .*

7. La construction graphique du point  $M'$  qui correspond au point quelconque  $M$  est bien connue (<sup>1</sup>); nous l'exposerons cependant, parce

---

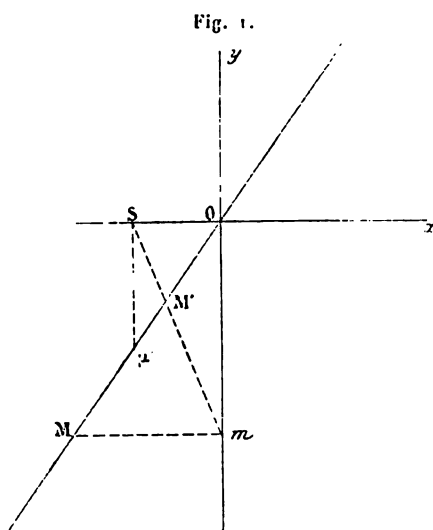
(<sup>1</sup>) CREMONA, *Éléments de Géométrie projective*, p. 68.

que cette construction légèrement modifiée nous conduira à un théorème remarquable.

Le problème à résoudre est celui-ci :

*On donne sur une droite passant par le point  $O$ , où sont confondus les points doubles des divisions projectives, le point  $\mu'$  qui correspond au point à l'infini de la droite et un point quelconque  $M$ , il faut construire le point  $M'$  qui correspond à  $M$ .*

Par le point  $O$  traçons deux droites quelconques, rectangulaires ou non,  $Ox$  et  $Oy$ . Projetons sur  $Oy$  et parallèlement à  $Ox$  tous les points



de la division  $M$  de  $OM$  et soit, par exemple,  $m$  la projection du point  $M$ . Les droites  $Oy$  et  $OM$  portent deux divisions projectives : la division  $m$  sur  $Oy$  et la division  $M'$  sur  $OM$ . Deux points correspondants de ces divisions se confondent au point  $O$  de l'intersection de deux droites; ces divisions sont donc perspectives, et les droites qui joignent les points correspondants  $m$  et  $M'$  concourent en un même point. Le point  $\mu'$  de  $OM$  correspond au point à l'infini de  $Oy$ ; traçons donc la parallèle à  $Oy$  par le point  $\mu'$ , elle coupera  $Ox$  au point de concours  $S$ . En joignant le point  $S$  au point  $m$ , et en prenant le point d'intersection de cette droite et de  $OM$ , on obtiendra le point  $M'$  cherché qui correspond au point  $M$  (*fig. 1*).



et de  $\Sigma\mu$  concourent en un même point. Or la droite qui joint le point  $\mu$  à son correspondant de  $Ox'$  coupe  $Oy$  au point  $O$ . Ce point  $O$  est donc le point de concours et la droite  $Om$  coupe  $\Sigma\mu$  au point  $m'$  qui correspond à  $m$ . En projetant maintenant le point  $m'$  parallèlement à  $Oy$  sur  $OM$ , nous obtiendrons, sur cette dernière droite, le point cherché  $M'$  qui correspond à  $M$ .

Supposons que la droite  $Ox$  soit la ligne de terre d'une épure de Géométrie descriptive,  $\Sigma$  un point de la verticale du point  $O$  et  $\Sigma x'$  la trace verticale d'un plan horizontal  $\pi$  mené par le point  $\Sigma$ . Le point  $m$  est alors la projection sur le plan vertical de la projection du point  $M$  sur le plan  $\pi$ , et la construction que nous avons faite est celle de la projection sur le plan horizontal de l'intersection des droites de l'espace  $OM_\pi$  et  $\Sigma\mu'$ ,  $M_\pi$  étant la projection du point  $M$  sur le plan  $\pi$  (fig. 2).

Si nous supposons que le point  $M$  soit un point quelconque de la courbe  $F_m$  (n° 4) et le point  $\mu'$  un point de la courbe  $\varphi'_n$ , il est démontré que :

*Le lieu géométrique des points  $M'$  qui correspondent aux points  $M$  de la courbe  $F_m$  est la projection horizontale de la courbe d'intersection de deux cônes : l'un de ces cônes a pour sommet le point  $\Sigma$  et pour base la courbe  $\varphi'_n$ , l'autre a pour sommet le point  $O$  et pour base la projection de la courbe  $F_m$  sur le plan horizontal mené par le point  $\Sigma$ .*

9. On peut déduire de ce théorème général tous ceux que nous avons démontrés plus haut; il conduit encore à d'autres conséquences, comme nous le verrons dans la suite. Pour le moment, nous nous contenterons de signaler celle-ci : nous avons supposé que le lieu des points  $M$  est une courbe quelconque  $F_m$ ; supposons maintenant que cette courbe soit de la même nature que les courbes  $\varphi'_n$  et  $\varphi_n$ , c'est-à-dire qu'elle ait, au point  $O$ , un point multiple de l'ordre  $m-1$  et désignons-la par  $\Phi_m$ . Le lieu géométrique des points  $M'$  qui correspondent aux points  $M$  de  $\Phi_m$  est la projection horizontale de la courbe d'intersection des cônes  $[\Sigma, \varphi'_n]$  et  $[O, \Phi'_n]$ ,  $\Phi'_n$  représentant la projection de  $\Phi_n$  sur le plan horizontal passant par le point  $\Sigma$ . Il est facile de voir que :

*Le lieu géométrique des points  $M'$  ne change pas si, au lieu d'admettre*

que la courbe  $\varphi'_n$  porte les points  $\mu'$  qui correspondent, dans le plan  $P'$ , aux points de la droite de l'infini du plan  $P$ , et que la courbe  $\Phi_m$  porte les points  $M$ , on suppose que c'est la courbe  $\Phi_m$  qui porte les points  $\mu'$  et que la courbe  $\varphi'_n$  porte les points  $M$ .

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de supposer que le plan  $\pi$  passant par  $\Sigma$  devienne le plan horizontal de projection, que le point  $\Sigma$  remplace le point  $O$  et que le point  $O$  remplace le point  $\Sigma$ . Les deux cônes restent les mêmes et la projection de leur courbe d'intersection est la même sur les plans horizontaux passant par  $O$  et par  $\Sigma$ .

#### Cas particuliers.

$$n = 1.$$

10. Si nous supposons  $n = 1$ , la courbe  $\varphi'_1$  est une droite qui ne passe pas par le point  $O$ ;  $\varphi_1$  est une droite parallèle à  $\varphi'_1$ , placée symétriquement par rapport au point  $O$  (n° 3); le lieu géométrique des points doubles est une droite parallèle à  $\varphi'_1$ , passant par le point  $O$  (n° 5). Nous trouvons donc ainsi un cas particulier de la transformation homologique, celui où le centre d'homologie est un point de l'axe d'homologie. Cette transformation est bien connue; nous ne citerons qu'un des théorèmes qu'elle établit :

*Si le centre d'homologie est un point de l'axe d'homologie, la transformée d'un cercle qui passe par le centre d'homologie est une conique osculée par le cercle en ce point (1).*

Nous nous servirons de ce théorème dans la suite.

$$n = 2, m = 1.$$

11. Supposons  $n = 2$ , la transformation est biquadratique. Ce cas est particulièrement intéressant quand la courbe  $\varphi'_2$  est un cercle; tous les théorèmes que nous avons démontrés deviennent alors des théorèmes de Cinématique. En effet, quand un plan  $P$  se déplace sur lui-

---

(1) PONCELET, *Propriétés projectives*, p. 172; 1822.

même, le point  $O$  étant le centre instantané de rotation, le centre de courbure  $M'$  de la trajectoire d'un point  $M$  se trouve sur la droite  $OM$ ; et, pour tous les points  $M$  situés sur une même droite issue de  $O$ , on a

$$\frac{1}{OM'} - \frac{1}{OM} = \text{const.}$$

Les points  $M$  et  $M'$  forment donc sur cette droite deux divisions projectives dont les points doubles se confondent au point  $O$  <sup>(1)</sup>. De plus, le lieu géométrique des points  $M'$  qui correspondent aux points de la droite de l'infini est une circonférence de cercle qui passe par le centre instantané de rotation. Cette circonférence a reçu le nom de *circonférence des centres*.

Nous pouvons donc immédiatement énoncer les théorèmes suivants :

1° *Quand un plan se déplace sur lui-même, le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une droite du plan mobile est une conique osculée au centre instantané par la circonférence des centres.*

2° *Le lieu géométrique des points dont les trajectoires ont leur centre de courbure à l'infini est la circonférence symétrique de la circonférence des centres par rapport au centre instantané de rotation* <sup>(2)</sup>.

Cette circonférence a reçu le nom de *circonférence des inflexions*.

3° *Le lieu géométrique des points dont les trajectoires ont leurs centres de courbure sur une droite donnée est une conique osculée par la circonférence des inflexions au centre instantané de rotation.*

4° *Le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe  $F_m$ , de l'ordre  $m$ , est une courbe de l'ordre  $2m$  ayant trois points multiples de l'ordre  $m$  situés sur la circonférence des centres et infiniment voisins du centre instantané de rotation, ou, en d'autres termes, ayant  $m$  branches qui passent au centre instantané où chacune d'elles est osculée par le cercle des centres.*

Nous n'énoncerons pas le théorème corrélatif. Nous laissons égale-

<sup>(1)</sup> CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 109; 1880.

<sup>(2)</sup> BRESSE, *Sur un théorème nouveau*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, 1853). — MANNHEIM, *Construction des centres de courbure*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVII<sup>e</sup> Cahier).

ment de côté les cas particuliers où  $F_m$  passe par le centre instantané et a, en ce point, un contact plus ou moins élevé avec la circonférence des centres; nous retrouverons ces cas plus loin.

5° *Le lieu géométrique des points du plan qui se confondent avec les centres de courbure de leurs trajectoires est formé par les deux droites imaginaires qui joignent le centre instantané aux points circulaires de l'infini* <sup>(1)</sup>.

La conique lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une droite  $l$  est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la droite  $l$  ne coupe pas, coupe ou touche la circonférence des inflexions.

12. Nous allons chercher la loi suivant laquelle varie le rayon de courbure des trajectoires des divers points d'une droite passant par le centre instantané de rotation.

Soient

$M$  un point quelconque de la droite;

$M'$  le centre de courbure de sa trajectoire;

$\mu$  le point où la droite  $OM$  coupe le cercle des centres.

Nous dirons que les longueurs  $OM$ ,  $OM'$  sont positives quand elles sont portées dans le même sens que  $O\mu$ ; le rayon de courbure sera positif si, en le parcourant depuis le centre de courbure jusqu'au point décrivant, on marche dans le sens positif.

On a

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{OM'} + \frac{1}{O\mu},$$

d'où

$$OM = OM' + \frac{OM'^2}{OM + O\mu}.$$

Posons

$$OM = x, \quad OM = OM' + y, \quad O\mu = a.$$

---

(1) Ce cas particulier du théorème du n° 5 a été démontré par M. Mannheim dans son Mémoire *Sur les surfaces trajectoires*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 1875).

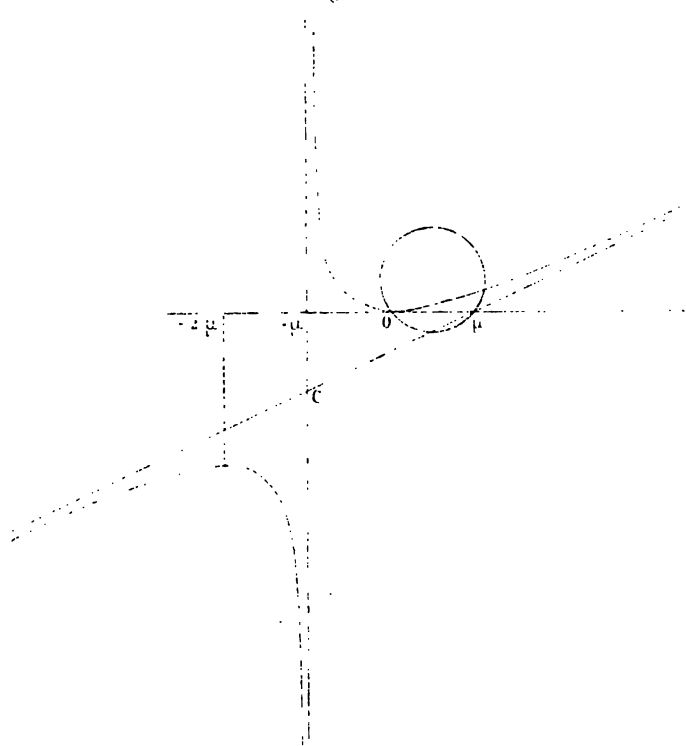


$y$  représentera le rayon  $\alpha$  de courbure. L'équation

$$y = \frac{x^2}{x + a}$$

représente une hyperbole dont une asymptote est perpendiculaire à  $O\mu$  et coupe cette droite en un point  $- \mu$  dont la distance au point  $O$  est égale à  $- O\mu$ ; le centre, situé sur cette asymptote, a une ordonnée égale à  $- 2O\mu$ . La seconde asymptote passe par le point  $\mu$  (*fig. 3*).

Fig. 3.



L'inspection de cette figure montre que, si le point  $M$  parcourt  $Ox$ , à partir de l'origine  $O$  et dans le sens positif, le rayon de courbure va constamment en augmentant. Si, au contraire, le point  $M$  se dirige, à partir de  $O$ , dans le sens opposé à  $O\mu$ , le rayon de courbure, conservant le même signe que précédemment, augmente d'abord lentement, puis de plus en plus rapidement, et atteint une longueur infinie quand

$OM = -O\mu$ , c'est-à-dire quand  $M$  traverse le cercle des inflexions. Le rayon de courbure change alors de signe; sa valeur absolue décroît d'abord très rapidement à partir de l'infini, puis moins rapidement jusqu'à ce qu'elle atteigne un minimum, quand  $OM = -2O\mu$ ; à partir de ce point, la valeur absolue du rayon de courbure augmente de nouveau jusqu'à ce qu'elle atteigne l'infini.

Le rayon de courbure a donc deux maxima et deux minima : les maxima correspondent aux positions du point  $M$  à l'infini et sur le cercle des inflexions; les deux minima correspondent au centre instantané et à la position du point  $M$  sur le cercle qui a pour rayon le diamètre du cercle des inflexions, et pour centre le point de ce dernier cercle qui est diamétralement opposé au centre instantané de rotation. Ce cercle est connu sous le nom de *cercle de roulement*. Nous avons ainsi démontré une propriété, nouvelle peut-être, des points de ce cercle. Nous pouvons l'énoncer ainsi :

*Un point quelconque du cercle de roulement décrit une trajectoire dont le rayon de courbure est un minimum, si on le compare à ceux des trajectoires des autres points situés sur la même droite issue du centre instantané de rotation.*

On peut résumer la marche du point  $M$ , celle du point  $M'$  correspondant et celle du rayon de courbure dans le Tableau suivant :

OM.		$O\mu'$ .		Rayon de courbure.	
$+\infty$	à $+0$	$+O\mu$	à $+0$	$+\infty$	à $+0$
$-0$	à $-O\mu$	$-0$	à $-\infty$	$-0$	à $+\infty$
$-O\mu$	à $-2O\mu$	$+\infty$	à $+2O\mu$	$-\infty$	à $-4O\mu$
$-2O\mu$	à $-\infty$	$+2O\mu$	à $+O\mu$	$-4O\mu$	à $-\infty$

13. M. Rivals a démontré, en 1853, que les centres de courbure des éléments simultanément décrits par les divers points d'une droite se trouvent sur une courbe du second degré [Mémoire de BRESSE, *Sur un théorème nouveau*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, 1853)]. MM. Gilbert et Mannheim, simultanément, ont démontré le même théorème, en ajoutant que la conique est tangente au cercle des centres [GILBERT, *Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans* (*Académie royale de Bruxelles*, 1867); et MANNHEIM, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII<sup>e</sup> Cahier].

Enfin, M. Schell, dans sa *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, p. 166, 1879, énonce encore le même théorème sans le préciser davantage.

Nous ne croyons pas que personne eût remarqué que la conique est osculée par le cercle des centres au centre instantané de rotation, lorsque nous avons fait connaître cette propriété (*Comptes rendus*, p. 1092, mai 1881).

Quoi qu'il en soit, nous désignerons à l'avenir sous le nom de *conique de Rivals* d'une droite le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des divers points de cette droite : nous adoptons cette dénomination pour abréger le discours.

14. Nous savons que, pour trouver la conique de Rivals d'une droite donnée  $l$ , il suffit de considérer un cône ayant son sommet en un point quelconque  $\Sigma$  de la verticale du centre instantané de rotation  $O$  (le plan qui se déplace est supposé horizontal), de projeter la droite  $l$  suivant  $l'$  sur le plan horizontal passant par  $\Sigma$ , et de prendre la projection horizontale  $C_2$  de l'intersection du cône et du plan  $Ol'$ .

La trace horizontale du plan  $Ol'$  est la parallèle à la droite  $l$  tracée par  $O$  : nommons  $l_1$  cette parallèle. Elle coupe le cercle des centres en un point  $O'$  qui appartient à la conique  $C_2$ ,  $OO'$  est la corde commune à  $C_2$  et à son cercle osculateur en  $O$ . Nommons  $C_2$  la conique d'intersection du cône et du plan  $l'O$ .

Le diamètre conjugué à  $l'$  passe par le milieu de  $OO'$ ; les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à  $OO'$ : elles sont donc les intersections avec le plan  $Ol'$  des plans tangents au cône dont les traces sont parallèles à  $l$ . De là résulte la construction indiquée (*fig. 4*). Ce diamètre se projette sur le plan vertical suivant  $A'B'$ , et, sur le plan horizontal, suivant  $AB$ . Il est situé dans le plan  $\Sigma DE$ , sa trace verticale est donc le point  $L'$ ; par suite, le diamètre de la conique de Rivals conjugué à  $OO'$  s'obtient en joignant le pied de la perpendiculaire abaissée du point  $O$  sur  $l$  au milieu de  $OO'$ , et le centre de cette conique est le point  $\varphi$ , milieu de  $AB$ .

Ajoutons que le centre  $\varphi$  est le milieu du segment  $AB$  intercepté sur la droite  $L\omega$  par les côtés de l'angle droit  $DOE$ .

• Cherchons maintenant quel est le lieu géométrique des centres des coniques de Rivals qui correspondent à des droites parallèles.



nière suivante : si l'on trace par le point  $O$  une parallèle à  $\omega L$ , cette droite sera la conjuguée harmonique de  $\omega\varphi$ , par rapport aux côtés de l'angle droit  $OD$  et  $OE$ . Pour tracer  $O\varphi$ , il faut donc d'abord tracer par le point  $O$  une parallèle à  $OL$ , puis prendre sa conjuguée harmonique par rapport à  $OD$  et  $OE$ ; le rayon  $O\varphi$  du faisceau  $O$  correspondra aussi projectivement au rayon  $\omega\varphi$  du faisceau  $\omega$ . Cette construction montre que l'hyperbole équilatère passe au point  $\omega$ . Sa tangente en  $O$  est la conjuguée harmonique de  $O\omega$  par rapport à  $OD$  et  $OE$  : c'est donc la tangente en  $O$  à la circonférence des centres. La tangente en  $\omega$  est parallèle à la tangente en  $O$ . Ainsi, le lieu du point  $\varphi$  est tangent en  $O$  et en  $\omega$  à toutes les coniques de Rivals, et en  $O$  au cercle des centres.

Le cercle osculateur de l'hyperbole équilatère au centre instantané est le cercle décrit sur le rayon du cercle des inflexions, car  $C$  et  $O$  sont des points de cette courbe et  $CO$  est sa normale en  $O$ . Donc :

3° *Les hyperboles équilatères, lieux des centres des coniques de Rivals qui correspondent à un système quelconque de droites parallèles, ont toutes le même cercle osculateur au cercle instantané de rotation.*

Le cercle osculateur à l'hyperbole équilatère en  $\omega$  est symétrique du cercle osculateur en  $O$ . Donc :

4° *Le cercle osculateur en  $\omega$  à l'hyperbole équilatère qui correspond à la direction  $l$  a pour diamètre constant  $CO'$ , et, quand la direction  $l$  varie, son centre décrit un cercle concentrique au cercle des centres et de rayon moitié moindre.*

Les tangentes à l'hyperbole équilatère, qui correspond à la direction  $l$ , aux points  $O$  et  $\omega$ , sont parallèles, comme nous venons de le voir;  $\omega O$  est donc un diamètre de cette courbe, et le milieu  $\psi$  de  $\omega O$  est son centre. Donc :

5° *Quand la direction de  $l$  varie, le centre de l'hyperbole équilatère qui correspond à chaque direction parcourt la circonférence tangente au cercle des centres au centre instantané de rotation et dont le diamètre est égal à la moitié du rayon du cercle des centres (1).*

---

(1) Les théorèmes 1° et 5° du n° 14 sont dus à M. Gilbert (*loco citato*).

15. Passons maintenant aux coniques  $C'_2$  situées sur le cône et dont les projections sont les coniques de Rivals.

Considérons la conique déterminée par le plan  $O'OL'$ ; son centre  $\varphi_1$  se trouve au milieu du segment  $(AA')$ ,  $(BB')$  de la droite qui joint le point  $\omega$  au point  $L'$ . Quand la droite  $l'$  se déplace parallèlement à elle-même, la droite  $\omega L'$  tourne autour du point  $\omega$  dans le plan  $\Sigma DE$  et le centre de la conique  $C'_2$  est toujours le milieu du segment intercepté sur cette droite par les côtés de l'angle  $D\Sigma E$ . Donc :

*Le lieu géométrique des centres des coniques  $C'_2$  dont les projections sont les coniques de Rivals qui correspondent à un système de droites parallèles est une hyperbole.*

Les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux droites  $\Sigma D$ ,  $\Sigma E$ , et la courbe passe aux points  $\Sigma$ ,  $\omega$  et  $C$ . Cette hyperbole est aussi le lieu géométrique des intersections des rayons correspondants des deux faisceaux  $\omega$  et  $\Sigma$ ; le faisceau  $\omega$  est formé des rayons  $L'$ , le faisceau  $\Sigma$  des droites conjuguées harmoniques des parallèles menées par  $\Sigma$  aux droites  $\omega L'$  par rapport aux droites fixes  $\Sigma D$ ,  $\Sigma E$ ; d'où il résulte que les tangentes en  $\Sigma$  et en  $\omega$  à l'hyperbole sont parallèles : le milieu de la droite  $\Sigma\omega$  est donc le centre de cette courbe. Donc :

*Le centre de l'hyperbole qui correspond à une direction  $l$  décrit le cercle d'intersection du plan horizontal passant par le milieu de  $\Sigma O$  avec le cône qui a pour sommet  $\Sigma$  et pour base le cercle dont le diamètre est le rayon du cercle des centres qui passe au centre instantané de rotation, quand cette direction varie.*

Désignons ce cercle par  $(\psi_1)$ . Les asymptotes de l'hyperbole lieu géométrique des centres des coniques  $C'_2$  qui ont pour projections les coniques de Rivals correspondant à un système de droites parallèles à  $l$  sont les parallèles menées par  $\psi_1$  aux droites  $\Sigma D$  et  $\Sigma E$ . Le plan de ces parallèles est le plan  $\Sigma DE$ ; donc les traces des asymptotes sont sur une droite qui passe toujours par le point  $C$ . Si, par le point  $\psi_1$ , on mène une parallèle à  $\Sigma C$ , la trace de cette droite sera au milieu des points  $C$  et  $\omega$  (*fig. 4*) et le lieu géométrique de ces traces sera la circonférence passant par le point  $C$  et décrite sur la moitié du rayon  $CO$  comme diamètre. Enfin, on obtiendra les traces des asymptotes en por-

tant sur la droite  $Cb$ , de part et d'autre du point  $b$ , une longueur égale à  $\frac{CO}{2}$ . Donc :

*Le lieu géométrique des traces des asymptotes des hyperboles  $C_2$  qui correspondent à des systèmes de droites parallèles est la cardioïde du cercle décrit sur  $CC'$  comme diamètre.*

Les asymptotes elles-mêmes sont sur un conoïde qui a pour directrices la cardioïde et le cercle situé dans un plan horizontal équidistant de  $\Sigma$  et de  $O$  et qui a pour projection le cercle décrit sur  $C'O$  comme diamètre et pour cône directeur le cône dont le sommet est au point  $\Sigma$ , et dont la base est le cercle des centres.

Ce conoïde est tangent au cône directeur le long de la génératrice  $\Sigma C$ ; le cercle  $(\psi_1)$  est une courbe double et la droite  $\Sigma C$  une arête de rebroussement.

16. Considérons encore le cône dont le sommet est le point  $\Sigma$  et dont la base est le cercle des centres, la droite  $l$  et sa projection  $l'$  sur le plan horizontal passant par le point  $\Sigma$ .

Joignons deux points  $A$  et  $B$  de la conique  $C_2$  de Rivals au point  $O$ , ces deux droites couperont le cercle des centres aux points  $A_1$  et  $B_1$ . D'autre part, joignons les points  $A$  et  $B$  au sommet du cône, ces deux génératrices couperont la conique  $C_2$  située dans le plan  $Ol'$  aux points  $A'$  et  $B'$  dont les projections sur le plan horizontal sont  $A$  et  $B$ . Les droites  $AB$  et  $A'B'$  concourent sur la trace horizontale du plan  $Ol'$ , les droites  $AB$  et  $A_1B_1$  concourent aussi sur cette trace; donc les trois droites  $AB$ ,  $A_1B_1$  et  $A'B'$  concourent au même point de la trace du plan  $Ol'$ . Donc, les droites qui joignent des points correspondants de la conique de Rivals et du cercle des centres concourent sur la parallèle à la droite  $l$  menée par le centre instantané. Donc :

*La conique de Rivals d'une droite  $l$  et le cercle des centres sont deux courbes homologues; le centre d'homologie est le centre instantané de rotation et l'axe d'homologie est la parallèle à la droite  $l$  menée par le centre instantané de rotation.*

D'après le théorème du n° 10, le cercle des centres est le cercle osculateur de la conique au centre instantané.

Les tangentes aux points correspondants concourent sur l'axe d'ho-

mologie. La droite donnée  $l$  et la parallèle à  $l$ , symétrique de cette droite par rapport au centre d'homologie, sont les droites-limites. La conique peut donc être tracée exactement.

Puisque la droite donnée est la droite-limite de la figure de la conique, les points d'intersection de cette droite et de cette conique correspondent aux points d'intersection de la droite de l'infini et du cercle des centres. Donc :

*La droite  $l$  est toujours une sécante idéale de la conique de Rivals correspondante, et les extrémités de la corde idéale sont sur les droites isotropes issues du centre instantané de rotation; le point milieu réel de la corde idéale est le pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite du centre instantané.*

Ce théorème peut s'énoncer en d'autres termes :

*Le lieu géométrique des points du plan qui se confondent avec les centres de courbure de leurs trajectoires se compose des droites isotropes du centre instantané.*

C'est sous cette forme que nous avons déjà trouvé ce théorème.

17. Nous allons maintenant déterminer le pôle de la droite  $l$  par rapport à la conique de Rivals de cette droite (fig. 4).

Le plan polaire de la droite  $\Sigma C$ ,  $C$  étant le centre du cercle des centres, par rapport au cône  $[\Sigma, C]$ , est évidemment le plan horizontal passant par  $\Sigma$ . Le plan sécant  $Ol'$  coupe le cône suivant la conique  $C_2$ , dont  $C_2$  est la projection orthogonale, la droite  $\Sigma C$  au point  $L'_1$ , le plan polaire de cette droite suivant la droite  $l'$ . Le point  $L'_1$  est le pôle de  $l'$  par rapport à  $C_2$ .

La projection orthogonale  $L_1$  du point  $L'_1$  est le pôle de la droite  $l$  par rapport à  $C_2$ . Nous savons que la droite qui joint le point  $\omega$ , milieu de  $OO'$ , au pied  $P$  de la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur  $l$  est le diamètre conjugué de  $l$  par rapport à  $C_2$ ; le point  $L_1$  est sur cette droite. Il est aussi sur  $OC$ , projection de  $\Sigma C$ . Donc :

*Le lieu géométrique des pôles de toutes les droites du plan par rapport aux coniques de Rivals correspondantes est la droite qui joint le centre instantané de rotation au centre du cercle des centres.*



Imaginons maintenant un dièdre rectangle dont l'arête coïncide avec  $\Sigma O$ . Les traces des faces du dièdre sur le plan horizontal coupent le cercle des centres en deux points  $m$  et  $n$ , et la droite  $mn$  passe par le centre du cercle; donc les plans  $\Sigma mn$  passent par la droite  $\Sigma C$  quand le dièdre tourne autour de  $\Sigma O$ . Les plans  $\Sigma Om$ ,  $\Sigma On$  couperont le plan  $O\ell$  suivant deux droites  $OM'$  et  $ON'$  qui rencontrent la conique  $C_2$  en  $M'$  et  $N'$ , et la corde  $M'N'$  passe toujours par le point  $L_1, L_1$ . Les projections  $OM$  et  $ON$  de  $OM'$  et  $ON'$  sur le plan horizontal seront rectangulaires et les droites  $MN$ , cordes de l'arc sous-tendu dans  $C_2$  par l'angle droit  $MON$ , passent toujours par le pôle  $L_1$  de la droite  $l$ . Donc :

*Le pôle d'une droite  $l$  par rapport à la conique de Rivals correspondante est aussi le point de concours des hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans la conique qui ont leur sommet au centre instantané.*

18. Soit un plan horizontal quelconque  $\pi$ , il coupe le cône  $[\Sigma C]$  suivant une circonférence qui se projette sur le plan horizontal de projection suivant un cercle tangent à  $C_2$  au point  $O$ ; il coupe le plan  $O\ell$  suivant une droite parallèle à  $OO'$  et la projection de cette droite sera la corde commune à  $C_2$  et au cercle tangent à  $C_2$  en  $O$  dont il vient d'être question. De là un théorème bien connu. Si nous supposons que le plan  $\pi$  passe par le sommet du cône, il coupera le plan  $O\ell$  suivant la droite  $\ell'$ . Donc :

*La droite  $l$  est la sécante idéale commune à la conique de Rivals qui lui correspond et au cercle infiniment petit représenté par le centre instantané de rotation.*

19. Revenons au pôle  $L_1$  de la droite  $l$  par rapport à  $C_2$ . Ce point  $L_1$  se trouve sur le diamètre  $LA\omega B$ , l'angle  $AOB$  est droit : les axes de  $C_2$  sont donc les parallèles à  $OA$  et  $OB$  tracées par le centre  $\varphi$ . Nommons  $K$  et  $R$  les points d'intersection avec les axes de la normale  $OC$  à  $C_2$ ,  $a$  et  $b$  les axes de cette conique; on sait que l'on a

$$\frac{OK}{OR} = \frac{b^2}{a^2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varphi L_1}{\varphi A} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Ce résultat est indépendant du rayon de courbure en O et, par suite, de la position du point O; il démontre que :

*Le lieu géométrique des pôles  $L_1$ , par rapport à une conique  $C_2$ , des sécantes idéales communes à cette conique et à chacun de ses points considéré comme cercle infiniment petit, est une conique  $\Gamma_2$  homothétique de la conique  $C_2$ ; le centre d'homothétie est le centre de  $C_2$  et le rapport d'homothétie est  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ,  $a$  et  $b$  étant les axes de  $C_2$ .*

C'est, sous une autre forme, un théorème énoncé par Steiner (*Gesammelte Werke*, t. II, p. 432).

Les cordes communes  $l$  à la conique  $C_2$  et à chacun de ses points considéré comme cercle infiniment petit étant les polaires du point  $L_1$ , par rapport à  $C_2$ , il en résulte que :

*L'enveloppe des cordes communes à une conique  $C_2$  et à chacun de ses points, considéré comme cercle infiniment petit, est une conique  $\Gamma'_2$ , polaire réciproque de  $\Gamma_2$  par rapport à  $C_2$ .*

De plus :

*La conique  $\Gamma'_2$ , polaire réciproque de  $\Gamma_2$  par rapport à  $C_2$ , est une courbe homothétique de  $C_2$ ; le centre d'homothétie est le centre de  $C_2$ , le rapport d'homothétie est  $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ .*

En effet,

$$\overline{\varphi A}^2 = \varphi L_1 \cdot \varphi L \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi L}{\varphi A} = \frac{\varphi A}{\varphi L_1}.$$

La corde  $fg$  de  $C_2$  parallèle à la droite  $l$  et passant par le point  $L_1$ , a ses extrémités sur les droites OF et OG; FG étant le diamètre du cercle des centres parallèle à  $l$ .

Le triangle FCO est isocèle; donc le triangle  $fL_1O$  l'est aussi. Donc

$$OL_1 = L_1 f = \frac{fg}{2}.$$

Si l'on désigne par O et  $L_1$  deux points correspondants des coniques  $C_2$  et  $\Gamma_2$ , et si du point  $L_1$ , comme centre, avec  $L_1O$  comme rayon, on décrit une circonférence, elle passera aux points  $f$  et  $g$ . Donc :

*Si, par le point  $L_1$  de la conique  $\Gamma_2$ , on trace une tangente à cette*

conique, cette tangente interceptera sur la conique  $C_2$  une corde, et si sur cette corde, prise comme diamètre, on décrit une circonférence, elle sera tangente à la conique  $C_2$  au point  $O$  qui correspond à  $L_1$ .

Ces deux derniers théorèmes sont dus à Steiner (*loco citato*).

$$n = 2, m = 2.$$

20. Nous continuerons à supposer que  $\varphi''$  est un cercle. L'application des théorèmes généraux ne présente aucune difficulté; nous nous contenterons d'examiner quelques-uns des cas où la courbe  $F_2$  est elle-même un cercle.

Remarquons d'abord que, le cercle  $F_2$  passant aux points circulaires de l'infini, la courbe  $F'$  passe aussi par ces points. La courbe  $F'$  est, en général, du quatrième ordre, elle a toujours deux asymptotes imaginaires; les deux autres sont réelles et distinctes, réelles et coïncidentes, ou imaginaires suivant que  $F_2$  coupera, touchera ou ne coupera pas le cercle des inflexions. La courbe  $F'$  a trois points doubles sur le cercle des centres, infiniment voisins de  $O$ , qui sera donc un nœud d'osculation<sup>(1)</sup>. Mais deux de ces points sont imaginaires si  $F_2$  ne coupe pas la tangente en  $O$  au cercle des centres, le point double restant est alors un point isolé.

Si  $F_2$  passe par le centre instantané et y est tangent au cercle des centres, la courbe  $F'$  est aussi un cercle, tangent également au cercle des centres; mais  $F_2$  et  $F_2$  sont situés de part et d'autre de la tangente en  $O$  au cercle des centres.

Si  $F_2$  est le cercle de roulement,  $F_2$  est le cercle symétrique par rapport à  $O$ .

Si la courbe  $F_2$  passe par le centre instantané, mais sans être tangente au cercle des centres,  $F'$  est la projection horizontale de la courbe d'intersection de deux cônes; la génératrice verticale  $\Sigma O$  leur est commune, donc la courbe  $F_3$  qui passe par les points circulaires de l'infini est une strophoïde dont le point double est au point  $O$ .

Cette strophoïde est osculée, en  $O$ , par le cercle des centres  $\varphi_2'$ , et, comme la projection horizontale de l'intersection des deux cônes reste

(1) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, p. 263.

la même quand on considère  $\varphi'_2$  comme le cercle mobile et  $F_2$  comme le cercle des centres (n° 9), le cercle  $F_2$  est aussi un cercle osculateur en O de la strophoïde. Ainsi :

*Quand un cercle  $F_2$ , qui passe par le centre instantané de rotation, se déplace, le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires de ses divers points est une strophoïde dont le point double est au centre instantané. Les cercles osculateurs au point double sont le cercle  $F_2$  et le cercle des centres  $\varphi'_2$ .*

Il résulte de ce théorème que :

*Si l'on trace une transversale par le point double O d'une strophoïde, et si l'on nomme M, m, m' ses points d'intersection avec la courbe et avec ses deux cercles osculateurs en O, on a*

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{Om} + \frac{1}{Om'}.$$

La construction de la tangente en un point de la strophoïde et celle de son asymptote réelle n'offrent aucune difficulté.

Si le cercle  $F_2$  coupe orthogonalement le cercle  $\varphi'_2$ , la strophoïde devient une focale de Quetelet, et l'on voit facilement que le foyer de la courbe est le point milieu de la corde commune à  $F_2$  et à  $\varphi'_2$ . De là ce théorème :

*Dans la focale de Quetelet, le foyer et les centres des cercles osculateurs de la courbe au point double sont situés sur une même droite perpendiculaire à celle qui joint le foyer au point double.*

La correspondance qui existe entre le plan fixe et le plan mobile donne immédiatement des théorèmes qu'il serait quelquefois assez difficile d'établir directement.

Ainsi, aux théorèmes : Par un point donné P, on ne peut mener que deux tangentes au cercle; si le point P parcourt une droite, sa polaire tourne autour d'un point, correspondent ces théorèmes :

*Par un point P du plan d'une strophoïde, on ne peut tracer que deux coniques osculatrices de l'une des branches b de cette courbe en son point double et qui lui sont tangentes en un autre point.*

Nommons M et N les points de contact de ces deux coniques avec la strophoïde.

*La conique osculatrice de la branche b de la strophoïde en son point double O, qui est déterminée par les points M et N, pivote autour d'un point P' quand le point P parcourt une conique quelconque osculatrice de la branche b de la strophoïde au point O.*

A une droite du plan de la strophoïde correspond une conique osculatrice du cercle des inflexions au point O; de plus, la strophoïde est de la quatrième classe; donc :

*Étant donnés deux cercles  $F_2$  et  $f_2$  qui se coupent au point O, on ne peut tracer que quatre coniques osculatrices de  $f_2$  en O et tangentes à  $F_2$ .*

Une strophoïde n'a qu'un seul point d'inflexion réel; donc :

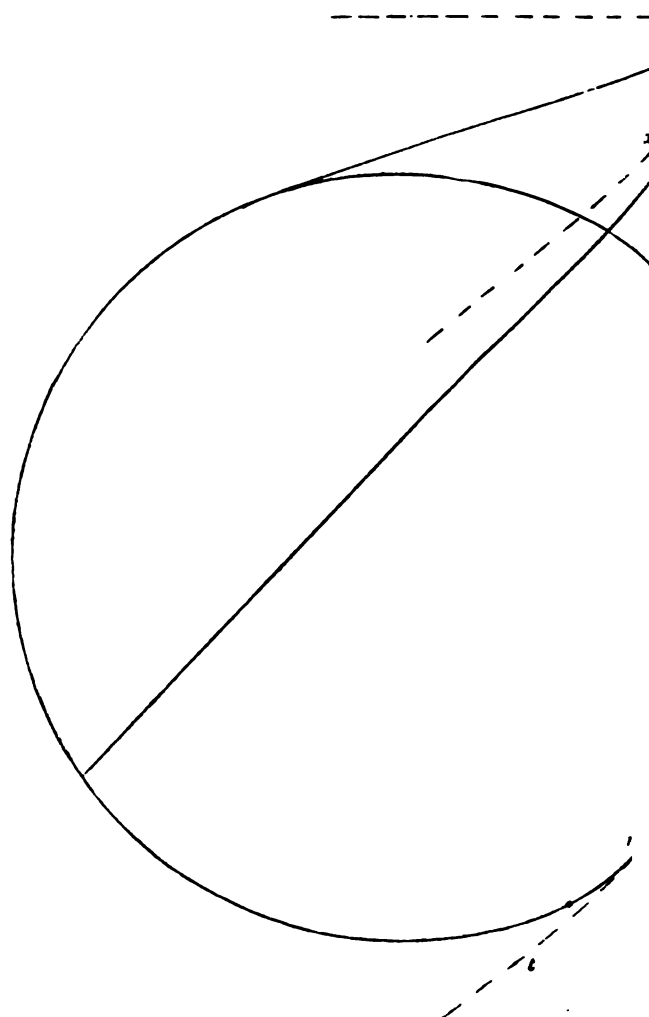
*Étant donnés deux cercles  $F_2$  et  $f_2$  qui se coupent au point O, il n'y a qu'une seule conique réelle osculatrice de  $f_2$  en O et osculatrice de  $F_2$ .*

Supposons maintenant que le cercle  $F_2$  ne passe pas au centre instantané de rotation O; la courbe  $F_4$  correspondante aura un nœud d'osculation en O sur le cercle des centres; ce nœud sera réel si  $F_2$  coupe la tangente en O au cercle des centres. C'est le cas qui est représenté dans la fig. 5.

On peut tracer la tangente en un point M de cette courbe en prenant la projection horizontale de l'intersection des plans tangents au cône  $[\Sigma\phi'_2]$  le long de la génératrice  $\Sigma m$  et au cône  $[OF'_2]$  le long de la génératrice  $Om$ .

Cette même construction peut être expliquée sans avoir recours aux cônes. Le point infiniment voisin de  $m$  sur la conique donnée  $F_2$  (conique ou cercle) appartient, comme le point  $m$ , à la tangente  $t$  en  $m$  à la conique. Donc, le point infiniment voisin de M sur la quartique appartient, comme le point M, à la conique qui correspond à la tangente  $t$ . En d'autres termes, la tangente en M à la quartique est la tangente en ce même point M à la conique qui correspond à la tangente  $t$ . Or cette dernière conique est la transformée homologique du cercle des centres, l'axe d'homologie passant par O et étant parallèle à  $t$ .

Traçons donc, par O, cette parallèle à  $t$ ; soit  $x$  son point d'intersec-



tion avec la tangente en  $m'$  au cercle des centres, la droite  $Mx$  sera la tangente à la quartique.

Cette construction montre que la quartique est inscrite à l'angle dont le sommet est au point  $O$  et dont les côtés sont tangents à  $F_2$ , ce qui est, d'ailleurs, évident *a priori*.

La quartique  $F_4$  est de la sixième classe, elle a quatre tangentes doubles et six points d'inflexion. Donc :

Si l'on donne un cercle  $f_2$ , un point  $O$  sur ce cercle et un cercle  $F_2$  qui ne passe pas par le point  $O$ , on peut énoncer les théorèmes suivants :

*Par un point quelconque on peut tracer six coniques osculatrices de  $f_2$  au point  $O$  et tangentes à  $F_2$ .*

*Il y a quatre coniques osculatrices de  $f_2$  au point  $O$  et doublement tangentes à  $F_2$ .*

*Il y a six coniques osculatrices de  $f_2$  au point  $O$  et osculatrices de  $F_2$ .*

Nous citerons encore le théorème suivant qui résulte immédiatement de la correspondance entre les deux plans.

Le point de contact des tangentes à un faisceau de cercles déterminé par les points  $A$  et  $B$ , issues d'un même point  $P$ , sont sur un même cercle. Donc :

*Si l'on donne un faisceau de quartiques passant par les points circulaires de l'infini et par les points  $A'$  et  $B'$  et ayant le même nœud d'osculation, les points de contact des coniques osculatrices de ce nœud et passant par un point  $P'$  avec les diverses quartiques sont sur une même quartique passant par les points circulaires de l'infini, ayant le même nœud d'osculation, mais ne passant pas par les points  $A'$  et  $B'$ .*

21. Reprenons les courbes générales  $F_m$  et  $F'_{mn}$  du n° 5. Ces courbes sont évidemment du même genre. De plus, le nombre des points d'inflexion de la courbe  $F'_{mn}$ , égal à celui des courbes  $F'_n$  (qui correspondent aux deux droites du plan  $P$ ) qui osculent  $F_m$ , est donné par l'expression

$$3m(m+n-3) - 3\sigma - 12\tau - 6(d-t) - 8\beta,$$

où  $d$  est le nombre des points doubles de  $F_m$ ,  $\beta$  le nombre de ses points de rebroussement,  $\sigma$  le nombre des points de la base du réseau de

courbes  $F'_n$  qui se confondent avec des points simples de  $F_m$ , et  $\tau$  le nombre des points de la base du même réseau qui se confondent avec les points doubles de  $F_m$ . Cette formule est empruntée à un Mémoire de M. Brill (').

Si l'on applique cette formule au cas de la Cinématique, il en résulte que :

*Le nombre des points d'inflexion du lieu géométrique  $F'_{2m}$  des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe  $F_m$  est*

$$3[m(m-1) - \sigma - 2\tau - 2d] - 8\beta.$$

---

(') BRILL, *Mathematische Annalen*, t. III, 1871.





ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

SUPPLÉMENT  
AU  
TOME III — ANNÉE 1886  
(TROISIÈME SÉRIE).



---

SUR LA

# DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

A LA SURFACE  
DES CONDUCTEURS FERMÉS ET DES CONDUCTEURS OUVERTS,

PAR M. G. ROBIN.

---

## INTRODUCTION.

Dans son premier Mémoire sur la distribution de l'électricité <sup>(1)</sup>, Poisson a posé, mais non résolu, le problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde conducteur. En écrivant que le potentiel est constant en tout point intérieur au sphéroïde, il arrive à une condition que l'on peut énoncer ainsi : si l'on divise la densité électrique en un point par la puissance  $n - 1$  du rayon vecteur et qu'on développe le quotient en une série de fonctions de Laplace, la fonction d'ordre  $n$  doit manquer dans le développement. Cette condition détermine complètement la densité inconnue ; mais son expression explicite paraît présenter des obstacles qui ont fait reculer Poisson. « Il serait difficile, dit-il, de donner une solution générale de cette question », et il se restreint au cas des sphéroïdes infiniment peu différents de la sphère, c'est-à-dire à des surfaces ayant en tous leurs points une excentricité dont le carré est négligeable. Il trouve alors pour la densité une série de fonctions sphériques, qui se déduit par une loi très simple de la série de même nature qui représente le rayon vecteur.

J'ai repris dans ce travail la question de la distribution électrique sur

---

<sup>(1)</sup> *Mémoires de l'Institut* pour 1811.

un sphéroïde sensiblement différent de la sphère ; mais j'ai abordé le problème par une voie qui me semble nouvelle. Au fond, la méthode de Poisson revient, comme presque toutes les méthodes usitées dans la solution des questions d'équilibre électrique, à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles, à *trois* variables indépendantes,  $\Delta V = 0$ . Celle que j'ai adoptée consiste dans l'intégration d'une équation fonctionnelle à *deux* variables indépendantes seulement. Cette équation fonctionnelle convient à tous les conducteurs fermés ; elle ne régit pas la classe infiniment plus étendue des conducteurs ouverts ; mais elle semble jouer dans certaines questions d'Électrostatique un rôle d'autant plus efficace que sa portée est plus limitée : c'est là une loi de compensation d'une application fréquente en Mathématiques.

Dans la solution du problème qui nous occupe, j'ai tenu compte de l'influence, négligée par Poisson, de masses électriques fixes. Ce point est capital ; car trouver l'équilibre électrique d'un conducteur soustrait à toute influence, c'est traiter un problème d'électrostatique très incomplet et parfois relativement très facile. On en peut juger par le cas bien connu de l'ellipsoïde. J'ai tenu à résoudre la question des sphéroïdes de forme quelconque pour donner une idée de l'énorme complication du problème général de la distribution électrique. Cette complication, quoique grande encore, se dissimule dans les solutions élégantes données pour des corps à forme simple, tels que l'ellipsoïde, le tore, les deux sphères, les sphères sécantes, la calotte sphérique, le lemniscatoïde de révolution <sup>(1)</sup>. On verra que la densité électrique sur un sphéroïde se présente sous la forme d'une série d'intégrales définies dont chacune, pour être évaluée, exige que l'on sache calculer la précédente ; il est vrai qu'à défaut d'une évaluation exacte, ces intégrales donnent prise successivement aux méthodes d'approximation indéfinie des quadratures mécaniques.

Mais, lors même qu'on saurait trouver la distribution de l'électricité sur tous les conducteurs fermés imaginables, on n'aurait fait que le premier pas dans la solution du problème général de l'Électrostatique. L'électricité en équilibre réside tout entière à la surface des corps conducteurs ; on peut donc supposer ces corps vidés, pour ainsi dire, de

---

(1) Voir le tome II des *Fonctions sphériques* de Heine.

leur substance intérieure et réduits à leur seule surface terminale. A ce point de vue, les conducteurs fermés, tels que la sphère, deviennent des cas infiniment particuliers des conducteurs ouverts, tels que la calotte sphérique. Une théorie générale de ces derniers ne semble pas avoir été donnée. Le cas n'est plus le même que celui des conducteurs ouverts. On ne peut pas identifier immédiatement le problème de la distribution électrique sur une surface ouverte avec le problème de Gauss : « Distribuer sur cette surface une couche dont le potentiel prenne en tous ses points une valeur donnée », parce que, cette couche étant trouvée, il faut la répartir entre les deux faces ; mais le départ se fait aisément : une fois le problème de Gauss résolu, on verra qu'une quadrature suffit pour achever la solution.

Une réduction considérable peut être effectuée dans le problème de la distribution de l'électricité sur les deux faces d'un conducteur ouvert : il est possible de ramener l'équilibre électrique de tous les conducteurs à contour multiple à celui des conducteurs à contour simple. Ainsi, que l'on imagine une sphère divisée en trois parties, une zone ou bande B et deux calottes C, C'. Si l'on connaît l'influence d'un point quelconque de la calotte C sur la calotte complémentaire B + C', et celle d'un point quelconque de C' sur B + C, on en pourra conclure la loi de la distribution électrique sur la zone B. La méthode qui m'a permis d'opérer cette réduction offre de l'analogie avec celle que Murphy a imaginée pour résoudre le problème de l'influence mutuelle des conducteurs. Mais cette idée des influences successives, qui se présente naturellement lorsqu'il s'agit de corps séparés, semble au premier abord inapplicable lorsqu'il s'agit de surfaces empiétant l'une sur l'autre, et l'on verra que, pour en tirer parti, j'ai dû la combiner avec d'autres idées assez complexes. L'inconvénient de cette méthode si générale réside dans les difficultés d'application. C'est cependant grâce à elle que j'ai réussi à calculer la distribution de l'électricité sur une zone sphérique conductrice, en prenant pour point de départ la solution si simple et si belle donnée par sir W. Thomson pour l'équilibre électrique de la calotte sphérique.

Je passe ici sous silence divers résultats plus ou moins dignes d'intérêt que l'on trouvera dans le cours de ce travail ; je me borne à faire observer que les méthodes dont j'ai fait usage peuvent trouver leur

application dans plus d'une branche de la Physique mathématique, en vertu de l'analogie ou de l'identité des équations aux dérivées partielles du second ordre qui régissent les divers ordres de phénomènes naturels. C'est ainsi que, dans ces dernières années, on a pu calculer les attractions apparentes de corps solides plongés dans un liquide par l'application pure et simple du principe de Murphy, transporté directement de l'Électrostatique à l'Hydrodynamique.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### LES CONDUCTEURS FERMÉS.

---

#### CHAPITRE I.

##### ÉQUATION FONCTIONNELLE CARACTÉRISTIQUE DES CONDUCTEURS FERMÉS.

---

Le problème le plus général de l'Électrostatique consiste à se donner des conducteurs et des masses électriques fixes, dont le nombre, la forme et la situation sont quelconques, et à chercher la distribution de l'électricité en équilibre sur les divers conducteurs pour des valeurs connues des potentiels ou des charges de chacun d'eux.

Le principe de Murphy ramène ce problème si compliqué à celui de l'influence de masses fixes sur un *seul* conducteur. C'est dans ce cas plus simple que nous nous placerons dans tout ce qui va suivre.

On sait que le problème de la distribution électrique sur un conducteur quelconque se ramène à celui-ci, posé par Green et par Gauss : trouver une fonction  $V$  des trois coordonnées, continue dans tout l'espace, dont les dérivées premières ne deviennent discontinues qu'à la surface du conducteur, qui satisfasse en tout point de l'espace à l'équation  $\Delta V = 0$ , qui prenne à la surface une valeur connue en chaque

point, et qui à l'infini soit du même ordre de petitesse que l'inverse de la distance à l'origine.

Quand il s'agit d'un conducteur fermé, on peut substituer à l'équation différentielle  $\Delta V = 0$  une équation fonctionnelle à deux variables indépendantes, plus avantageuse dans certains cas.

### I. — Établissement de l'équation fonctionnelle.

Considérons un point M de la surface  $\sigma$  du conducteur où la densité électrique a pour valeur  $e$ . Ce point subit les actions des divers éléments électriques  $e' d\sigma'$  du reste de la surface  $\sigma$  et des charges  $q_i (i = 1, 2, \dots, p)$  des points électrisés extérieurs, que nous supposons au nombre de  $p$ . Le potentiel au point M a pour valeur

$$V = \int_{\sigma} \frac{e' d\sigma'}{r} + \sum_1^p \frac{q_i}{r_i},$$

$r$  et  $r_i$  désignant les distances au point M de l'élément  $d\sigma'$  et du point de charge  $q_i$ . Si l'on prend la dérivée de  $V$  suivant la normale intérieure  $n$ , on sait que la valeur de la fonction  $\frac{\partial V}{\partial n}$  en un point de la surface est la moyenne arithmétique des valeurs, 0 et  $4\pi e$ , de cette même fonction en deux points, l'un intérieur, l'autre extérieur, infiniment

voisins du premier : c'est donc  $2\pi e$ ; et, comme  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{\cos(r, n)}{r^2}$ , on aura

$$(1) \quad e = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{e' \cos(r, n)}{r^2} d\sigma' + \frac{1}{2\pi} \sum_1^p \frac{q_i \cos(r_i, n)}{r_i^2}.$$

Telle est l'équation fonctionnelle que nous avons en vue d'obtenir. Comme le potentiel n'y figure pas, il est bon d'en donner une démonstration directe.

Coupons la surface  $\sigma$  par un plan infiniment voisin du plan tangent en M. Ce plan partage le conducteur en deux calottes  $s$  et  $S$ , la première infiniment petite. L'aire de la section  $s$ , diffère infiniment peu



de  $s$ . D'un point quelconque de  $s$ , on voit  $s$ , sous un angle solide infiniment voisin de  $2\pi$ , si la surface ne présente aux environs du point M aucune singularité. Donc, la densité étant continue, la calotte  $s$  exercera sur  $s$ , une répulsion dont la composante normale, d'après un théorème de Gauss, est sensiblement égale à  $2\pi es$ .

Soit  $F$  la composante normale de la répulsion exercée sur  $s$ , par la calotte  $S$  et par les points électrisés extérieurs. La condition d'équilibre est

$$F = 2\pi es;$$

et, comme on a visiblement

$$\lim \frac{F}{s} = \int_{\sigma} \frac{e' \cos(r, n)}{r^2} d\sigma' + \sum_1^p \frac{q_i \cos(r_i, n)}{r_i^2},$$

on en conclut l'équation (1). Cette équation fonctionnelle détermine l'inconnue  $e$ ; les deux variables indépendantes sont les deux angles dont la relation avec le rayon vecteur définit la surface du conducteur. Elle a toujours une solution et une seule; car elle exprime, comme il est facile de s'en assurer, que, sur une surface intérieure à  $\sigma$  et infiniment voisine, la composante normale de la répulsion est nulle en chaque point  $\left(\frac{\partial V}{\partial n} = 0\right)$ .

Avant d'utiliser la formule (1) pour la solution du problème des sphéroïdes conducteurs, nous allons en faire quelques applications très simples, qui en feront ressortir les avantages.'

## II. — Influence d'un point électrisé sur une sphère conductrice.

En appelant  $R$  le rayon de la sphère,  $V$  son potentiel constant,  $q$ , la charge du point,  $d$ , sa distance au centre de la sphère, on a visiblement

$$\frac{\cos(r, n)}{r} = \frac{1}{2R}, \quad d_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos(r_1, n), \quad V = \int_{\sigma} \frac{e' d\sigma'}{r} + \frac{q_1}{r_1}.$$

Si dans l'équation (1) on porte les valeurs des cosinus tirées des

deux premières relations et qu'on tienne compte de la troisième, on obtient

$$(2) \quad e = \frac{V}{4\pi R} - \frac{q_1}{4\pi} \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}.$$

On retrouve ainsi, par la voie la plus directe, le résultat que Sir W. Thomson a obtenu par des procédés détournés si ingénieux.

### III. — Sur un corps d'épreuve.

Un corps d'épreuve est, comme on sait, un conducteur de très petite dimension qu'on met en contact avec un autre conducteur de dimension finie. La charge prise par le corps d'épreuve ne dépend pas de la forme de la surface touchée; elle est proportionnelle à la densité électrique au point touché, avant le contact. La difficulté, insurmontable dans la plupart des cas, consiste à trouver le coefficient de proportionnalité. Lorsqu'il s'agit d'une petite sphère, Poisson a pu déterminer le rapport de sa densité électrique moyenne à la densité au point de contact : ce rapport a pour valeur  $\frac{\pi^2}{6}$ .

Voici un autre cas dont notre équation fonctionnelle permet de faire la théorie. Le corps d'épreuve est le *corps de plus grande attraction*, dont l'équation polaire est

$$(3) \quad \frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{1}{a^2}.$$

La constante  $a$  est le *diamètre*; le corps, qui est de révolution autour de son diamètre, présente au pôle un aplatissement infini.

Imaginons qu'on mette en contact par leurs pôles deux corps de plus grande attraction; on les suppose tous deux conducteurs et l'on communique à leur ensemble une charge électrique  $M$ . Exprimons que toutes les répulsions électriques se font équilibre au point de contact; en affectant de l'indice 1 toutes les quantités relatives au deuxième corps, nous aurons

$$\int_{\sigma} \frac{e' \cos \varphi}{r_1^2} d\sigma' = \int_{\sigma_1} \frac{e'_1 \cos \varphi_1}{r^2} d\sigma'_1,$$

ou, en vertu des équations des deux corps, en désignant par  $m$ ,  $m_1$ , leurs charges,

$$(4) \quad \frac{m}{a^2} = \frac{m_1}{a_1^2}.$$

Ainsi la charge totale se partage proportionnellement aux carrés des diamètres, c'est-à-dire aux surfaces.

Supposons maintenant le second corps isolé et possédant à lui seul la charge  $M = m + m_1$ . L'équation (1), appliquée au pôle, donne

$$e_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \frac{e'_1 \cos \varphi_1}{r_1^2} d\sigma'_1 = \frac{m + m_1}{a_1^2}.$$

En combinant cette relation avec la relation (4), on trouve

$$e_1 = \frac{m}{2\pi} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a_1^2} \right),$$

et, si le premier corps est très petit par rapport au second,

$$(5) \quad m = 2\pi a^2 e_1.$$

D'après la théorie du corps d'épreuve, ce résultat subsiste lorsqu'on remplace le second corps de plus grande attraction par un conducteur quelconque. Le rapport cherché est  $2\pi a^2$ . L'aplatissement du corps d'épreuve au pôle fait qu'une erreur de contact assez grande n'influe pas sensiblement sur la distribution électrique du système.

#### IV. — Énergie électrique des conducteurs fermés.

A la formule (1) se rattache une expression nouvelle de l'énergie électrique qui, au point de vue analytique, n'est pas sans intérêt. Généralement, l'expression de la densité sur un conducteur comporte un facteur arbitraire, que l'on détermine en se donnant, soit la charge  $M$ , soit le potentiel  $V$ . Chacune de ces opérations conduit à une double intégration, de sorte que l'énergie  $W = \frac{1}{2}MV$  se présente sous la forme du produit de deux intégrales doubles. On va voir qu'une seule intégrale double suffit à exprimer l'énergie électrique d'un conducteur fermé. Nous pouvons d'ailleurs supposer qu'un nombre quel-

conque de conducteurs, non influencés par des charges fixes, sont en présence.

Soient

$M$  un point de l'un d'eux,

$m = e d\sigma$  la charge en ce point,

$M'$  un autre point du système,

$m'$  sa charge,

$\rho$  et  $\rho'$  les distances des points  $M$  et  $M'$  à une origine fixe  $O$ .

Les divers éléments  $M'$  exercent en  $M$  une répulsion totale dirigée suivant la normale extérieure  $n$ , et dont la valeur est  $2\pi e$ . En projetant les répulsions composantes sur la direction  $\rho$ , on a donc

$$\sum \frac{mm'}{M'M} \cos(M'M, \rho) = 2\pi e \cos(n, \rho).$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par  $m\rho = e\rho d\sigma$ , puis intégrant sur toute l'étendue des  $p$  surfaces conductrices, il vient

$$\sum \sum \frac{mm'}{M'M} \rho \cos(M'M, \rho) = \sum_p \int 2\pi e^2 \rho \cos(n, \rho) d\sigma.$$

On peut, dans le premier membre, grouper les termes deux à deux de manière à mettre en évidence la somme partielle

$$\frac{mm'}{M'M} [\rho \cos(M'M, \rho) + \rho' \cos(M'M, \rho')].$$

On reconnaît aisément que la parenthèse se réduit à  $M'M$ , en sorte que le premier membre de notre équation,  $\sum \sum \frac{mm'}{M'M}$ , représente l'énergie électrique  $W$  de tout le système. Nous avons donc la formule

$$(6) \quad W = 2\pi \sum_p \int e^2 \rho \cos(n, \rho) d\sigma.$$

Elle est susceptible d'une légère transformation. Appelons  $d\omega$  l'élément de surface sphérique décrite du point  $O$  comme centre avec l'unité de rayon; suivant que le rayon vecteur  $\rho$  sort du conducteur ou y pénètre, on aura  $d\sigma \cos(n, \rho) = \pm \rho^2 d\omega$ , et, en regardant comme

négatifs les rayons vecteurs qui entrent dans le conducteur, comme positifs ceux qui en sortent, l'équation (6) devient

$$(7) \quad W = 2\pi \sum_p \int e^2 \rho^3 d\omega.$$

Pour une sphère de rayon R, la formule (7) donne immédiatement l'expression connue  $W = 8\pi^2 R^3 e^2$ .

#### V. — Énergie électrique d'un disque plan.

La méthode de calcul qui précède n'est pas directement applicable à l'énergie des disques, calottes, zones, etc. Il faut connaître la distribution de l'électricité sur les corps épais dont l'aplatissement peut donner naissance à ces surfaces.

Avant d'aborder le calcul de l'énergie d'un disque plan à contour quelconque, nous ferons quelques remarques relatives à la distribution de l'électricité sur l'ellipsoïde

$$(8) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si  $c$  désigne le demi petit axe, cet ellipsoïde est aplati dans le sens de l'axe des  $z$ . On sait que la densité électrique  $e$  en un point de la surface est proportionnelle à

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^4} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^4} y^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - r^2 \left( \frac{a^2 - c^2}{a^4} \cos^2 \psi + \frac{b^2 - c^2}{b^4} \sin^2 \psi \right)}},$$

$r$  et  $\psi$  représentant les coordonnées polaires dans le plan des  $xy$ .

Le plan qui passe par l'axe des  $z$  et par le point considéré coupe l'ellipse du plan des  $xy$  suivant un diamètre dont la demi-longueur  $\alpha$  est donnée par la formule

$$(9) \quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2}.$$

Posons maintenant

$$(10) \quad \frac{a^2 - c^2}{a^4} \cos^2 \psi + \frac{b^2 - c^2}{b^4} \sin^2 \psi = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}$$

et désignons par  $e_0$  la densité au sommet du petit axe; nous aurons

$$(11) \quad e = e_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2}}.$$

Si l'ellipsoïde dégénère en disque elliptique ( $c = 0$ ),  $\varepsilon^2$  tend vers 1, et le rapport  $\frac{c^2}{1 - \varepsilon^2}$  tend vers une limite  $k^2$ , finie et différente de zéro,

$$(12) \quad k^2 = \frac{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}{b^4 \cos^2 \psi + a^4 \sin^2 \psi}.$$

Remarquons enfin que, si  $\gamma$  désigne le rayon de courbure au sommet le plus aigu de la section correspondant à l'azimut  $\psi$ , le rapport  $\frac{c^2}{\gamma}$  reste toujours égal à la quantité finie  $\alpha$ .

Cela posé, considérons un disque plan à contour quelconque. Nous prendrons son plan pour plan des  $xy$  (ou des  $r, \psi$ ), et, pour fixer les idées, nous placerons l'origine au centre de gravité  $O$  du disque. Nous supposerons que le contour ne présente pas de point anguleux. En général, le disque résultera de l'aplatissement continu et indéfini d'une surface fermée dépourvue de toute singularité. Aux environs d'un point, cette surface pourra être confondue avec un ellipsoïde; les parties extrêmes des sections azimutales seront assimilables à des arcs d'ellipse très fortement courbés.

Nous supposerons le corps aplati symétrique par rapport au plan des  $xy$  (ou des  $r, \psi$ ). Il suffira de calculer l'énergie pour la moitié supérieure et de doubler. De cette façon la formule (6) devient

$$(6') \quad W = 4\pi \int e^2 \rho \cos(n, \rho) d\sigma.$$

Par analogie avec ce qui a lieu pour l'ellipsoïde, nous pouvons poser

$$(13) \quad e = \frac{\lambda \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2}},$$

$\alpha$  étant la valeur de  $r$  en un point de la ligne de contour,  $\lambda$  et  $\varepsilon$  deux fonctions de  $r$  et de  $\psi$ , dont la seconde prend la valeur 1 lorsque, le corps dégénérant en un disque, son épaisseur centrale  $c$  tend vers zéro, de telle façon que le rapport  $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$  tende vers une limite  $k^2$  finie et différente de zéro. Enfin, si l'on désigne par  $\gamma$  le rayon de courbure minimum d'une section azimutale, le rapport  $\frac{c^2}{\gamma}$  tendra aussi vers une limite finie  $\beta$ .

Concevons l'ellipse osculatrice au sommet aigu de la section considérée, et soit son équation

$$(14) \quad \frac{r'^2}{\alpha'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Son rayon de courbure minimum  $\frac{c'^2}{\alpha'}$  ayant pour valeur  $\gamma$ , on en conclut facilement

$$(15) \quad \lim \frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta}}.$$

Maintenant, comme on a  $d\sigma = \frac{r dr d\psi}{\cos(n, z)}$ , l'expression (6') de l'énergie devient

$$W = 4\pi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\alpha e^2 \rho \frac{\cos(n, \rho)}{\cos(n, z)} r dr.$$

L'intégrale par rapport à  $r$  est une intégrale *singulière* qui n'a de valeur sensible que pour  $r = \alpha$ . En effet, sauf dans le voisinage de la ligne de contour, le rapport  $\frac{\cos(n, \rho)}{\cos(n, z)}$  a une valeur insensible; sur cette ligne même, il est infini. Il nous suffira donc de calculer sa valeur pour les points voisins du contour, et nous serons en droit d'écrire les égalités approchées

$$\frac{\cos(n, \rho)}{\cos(n, z)} = \frac{\cos(n', r')}{\cos(n', z)} = -\frac{dz}{dr'},$$

et, en tenant compte de l'équation (14),

$$= \frac{c'^2 r'}{\alpha'^2 z} = \frac{c'}{\alpha'} \frac{r'}{\sqrt{\alpha'^2 - r'^2}} = \frac{c'}{\sqrt{\alpha'^2 - r'^2}} = \frac{c'}{c} \sqrt{\frac{\alpha + r}{\alpha' + r'}} \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}} = \frac{c'}{c} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}};$$

finalemeut, en vertu de l'équation (15),

$$\frac{\cos(n, \rho)}{\cos(n, z)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

En portant cette valeur dans l'expression de W, où nous ferons  $\rho = \alpha$  et où nous remplacerons  $c$  par sa valeur (13), nous obtiendrons

$$W = 4\pi \int_0^{2\pi} \lambda^2 \alpha^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} d\psi \int_0^\alpha \frac{cr dr}{(\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2) \sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

Si l'on pose  $\sqrt{\alpha^2 - r^2} = t$  et si l'on se rappelle que  $\frac{c^2}{1 - \varepsilon^2}$  tend vers la limite finie  $k^2$ , l'intégrale  $\int_0^\alpha \frac{cr dr}{(\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2) \sqrt{\alpha^2 - r^2}}$  devient

$$\int_0^\alpha \frac{k^2 c dt}{\alpha^2 c^2 + \varepsilon^2 k^2 t^2} = \frac{k}{\alpha \varepsilon} \left( \arctan \frac{\varepsilon k t}{\alpha c} \right)_0^\alpha = \frac{\pi k}{2 \alpha}.$$

On a donc enfin

$$(16) \quad W = 2\pi^2 \int_0^{2\pi} k \lambda^2 \alpha^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} d\psi.$$

On voit que l'énergie électrique d'un disque plan s'exprime par une seule intégrale simple prise le long de son contour.

Pour appliquer la formule au disque elliptique, il faut faire  $\beta = \alpha$ ,  $\lambda = e_0$ , remplacer  $\alpha$  et  $k$  par leurs valeurs tirées des relations (9) et (12). On trouve ainsi

$$(17) \quad W = 2\pi^2 \alpha^3 b^3 e_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(\alpha^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi)(\alpha^4 \sin^2 \psi + b^4 \cos^2 \psi)}}.$$





## CHAPITRE II.

## DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE D'UN SPHÉROÏDE CONDUCTEUR.

La principale application de notre équation fonctionnelle est la solution du problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde différent de la sphère d'une manière sensible. Nous supposons le sphéroïde dépourvu de toute singularité, pointe ou arête vive; mais sa surface peut être composée de portions raccordées de surfaces différentes. Il est soumis à l'influence d'un nombre quelconque  $p$  de points électrisés.

Mais, pour ne pas interrompre l'exposé de la solution, nous ferons quelques remarques préliminaires sur les développements en série, qui nous seront indispensables par la suite.

## I. — Digression sur les développements en série.

Soit à développer en série entière un produit de puissances de séries ou de polynômes  $A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda$  :

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \\ B &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \\ &\dots\dots\dots, \\ L &= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \dots, \end{aligned}$$

les exposants  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  étant quelconques.

Lorsque aucun des termes constants  $a_0, b_0, \dots, l_0$  n'est nul, ce développement est toujours possible pour des valeurs suffisamment petites de  $x$ . En appelant

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots$$

la série cherchée et en égalant la dérivée logarithmique de  $U$  à celle du produit donné, on a

$$\frac{U'}{U} = \alpha \frac{A'}{A} + \beta \frac{B'}{B} + \dots + \lambda \frac{L'}{L}.$$

L'identification des deux membres de cette égalité, qui sont rationnels en  $x$ , fournit les inconnues  $u_0, u_1, u_2, \dots$ . Voici le résultat de ce calcul.

Désignons par  $s_p$  la somme de tous les produits  $ab\dots l$  pour lesquels la somme des indices est égale à  $p$ . En convenant de traiter les indices comme des exposants, on fixe la signification des symboles  $\left(\frac{\partial s_p}{\partial a}\right), \left(\frac{\partial s_p}{\partial b}\right), \dots, \left(a \frac{\partial s_p}{\partial a}\right), \left(b \frac{\partial s_p}{\partial b}\right), \dots$ . Posons

$$(18) \quad s'_p = \alpha \left(a \frac{\partial s_p}{\partial a}\right) + \beta \left(b \frac{\partial s_p}{\partial b}\right) + \dots + \lambda \left(l \frac{\partial s_p}{\partial l}\right).$$

Les coefficients  $u$  seront donnés par la relation récurrente

$$(19) \quad ps_0 u_p = [s'_1 - (p-1)s_1] u_{p-1} + [s'_2 - (p-2)s_2] u_{p-2} + \dots + s'_p u_0,$$

à laquelle il faut adjoindre l'expression du premier terme

$$u_0 = a_0^\alpha b_0^\beta \dots l_0^\lambda.$$

On conclut de là, pour exprimer  $u_p$ , un déterminant qu'il est inutile d'écrire. Les  $a, b, \dots, l$  étant finis par hypothèse, les coefficients  $u$  sont visiblement finis. Si l'on appelle poids d'une lettre  $a$  le produit de son indice par son exposant, poids d'un terme  $ab\dots l$  la somme des poids des lettres qui y entrent,  $u_p$  est une fonction rationnelle, homogène et de poids  $p$  des  $a, b, \dots, l$ .

## II. — Solution du problème par une série d'intégrales définies.

Soit en coordonnées polaires  $(\rho, \theta, \psi)$

$$(20) \quad \rho = R(1 + n)$$

l'équation du sphéroïde. Considérons la famille de surfaces

$$(21) \quad \rho = R(1 + \alpha n),$$

où  $\alpha$  désigne un paramètre compris entre 0 et 1 ; elles sont toutes com-

prises dans les parties du sphéroïde primitif extérieures à la sphère de rayon  $R$  et dans les parties de la sphère extérieures au sphéroïde. Nous allons chercher la distribution de l'électricité sur l'un quelconque de ces sphéroïdes intermédiaires.

Soient  $M$  et  $M'$  deux de ses points,  $\rho, \theta, \psi$  et  $\rho', \theta', \psi'$  leurs coordonnées,  $r$  la distance de  $M$  à  $M'$ , en grandeur et direction.

Au système fixe  $(\theta', \psi')$  il est avantageux d'adjoindre un système de coordonnées  $(\omega, \varphi)$  mobile avec le point  $M$ , dans lequel le nouvel axe des  $z$  passe par ce point. On passe du premier système au second par les formules bien connues

$$(22) \quad \begin{cases} \cos \theta' = \cos \theta \cos \omega - \sin \theta \cos \varphi, \\ \cot(\psi' - \psi) = \frac{\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \cot \omega}{\sin \varphi}. \end{cases}$$

Désignons par  $\nu$  l'angle de la normale extérieure au point  $M$  avec la direction de  $r$ ; par  $e, e'$  les densités électriques aux points  $M, M'$ ; par  $q_i (i = 1, 2, \dots, p)$  la charge du point électrisé  $Q_i$ ; par  $\rho_i, \theta_i, \psi_i, \omega_i, \varphi_i, r_i, \nu_i$  les quantités relatives au point  $Q_i$  analogues aux quantités  $\rho', \theta', \psi', \omega, \varphi, r, \nu$  relatives au point  $M'$ .

Lorsqu'on se donne le potentiel constant  $V$  du sphéroïde, la densité électrique au point  $M$  est complètement déterminée par l'équation fonctionnelle

$$(1') \quad e = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{e' \cos \nu}{r^2} d\sigma' - \frac{1}{2\pi} \sum_1^p \frac{q_i \cos \nu_i}{r_i^2}.$$

Commençons par évaluer  $\frac{\cos \nu}{r}$ .

Si l'on appelle  $\beta$  l'angle des deux directions  $\rho$  et  $r$ ,  $\zeta$  l'angle de la normale extérieure au point  $M$  avec la direction  $\rho$ ,  $\lambda$  l'angle du plan déterminé par  $\rho$  et par cette normale avec le plan méridien correspondant à l'azimut  $\psi$ , le trièdre dont les arêtes sont  $\rho, r$  et la normale donnera

$$\cos \nu = \cos \beta \cos \zeta + \sin \beta \sin \zeta \cos(\varphi - \lambda)$$

ou bien

$$(23) \quad \cos \nu = \cos \beta \cos \zeta + \sin \beta (\sin \zeta \cos \lambda \cos \varphi + \sin \zeta \sin \lambda \sin \varphi).$$

Dans le triangle dont les côtés sont  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $r$ , on a

$$(24) \quad r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \omega,$$

$$(25) \quad \cos \beta = \frac{\rho' \cos \omega - \rho}{r}, \quad \sin \beta = \frac{\rho' \sin \omega}{r}.$$

Les produits  $\sin \zeta \cos \lambda$ ,  $\sin \zeta \sin \lambda$  se calculeront de la manière suivante : la normale extérieure fait avec les directions des coordonnées polaires  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  des angles  $\zeta$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  déterminés par les formules

$$(26) \quad \frac{\cos \zeta}{\rho} = \frac{\cos \zeta_1}{-\frac{\partial \rho}{\partial \theta}} = \frac{\cos \zeta_2}{-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \psi}} = - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\partial \rho^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \rho^2}{\partial \psi^2}}}.$$

En projetant la normale extérieure sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur  $\rho$ , on obtient les relations

$$(27) \quad \sin \zeta \cos \lambda = \cos \zeta_1, \quad \sin \zeta \sin \lambda = \cos \zeta_2,$$

où  $\cos \zeta_1$ ,  $\cos \zeta_2$  doivent être remplacés par leurs valeurs (26).

Portant dans l'équation (23) les valeurs (25) et (27) trouvées pour  $\cos \beta$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \zeta \cos \lambda$ ,  $\sin \zeta \sin \lambda$ , et divisant les deux membres de cette équation par  $r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \omega}$ , on obtient finalement

$$(28) \quad - \frac{\cos \nu}{r} = \frac{\rho^2 - \rho\rho' \cos \omega + \rho' \sin \omega \left( \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right)}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \omega) \sqrt{\rho^2 + \frac{\partial \rho^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \rho^2}{\partial \psi^2}}}.$$

L'expression de  $-\frac{\cos \nu_i}{r_i}$  se déduirait de la précédente par le changement de  $\rho'$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  en  $\rho_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\varphi_i$ ; mais, dans les transformations que nous ferons subir à l'équation (1), nous aurons besoin de connaître la valeur de

$$(29) \quad - \frac{\cos \nu_i}{r_i} = \frac{\rho^2 - \rho\rho_i \cos \omega_i + \rho_i \sin \omega_i \left( \cos \varphi_i \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi_i}{\sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right)}{\sqrt{(\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos \omega_i)^2 \left( \rho^2 + \frac{\partial \rho^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \rho^2}{\partial \psi^2} \right)}}.$$

Enfin, pour achever le calcul des termes qui figurent dans notre équation fonctionnelle, il faut évaluer le quotient  $\frac{d\sigma'}{r}$ . Si l'on conçoit que, dans l'expression du rayon vecteur  $\rho'$ , on ait éliminé  $\theta'$  et  $\varphi'$  au moyen des formules de transformation (22), on trouvera aisément

$$(30) \quad \frac{d\sigma'}{r} = \rho' \sqrt{\frac{\rho'^2 + \frac{\partial \rho'^2}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial \rho'^2}{\partial \varphi^2}}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \omega}} \sin \omega d\omega d\varphi.$$

Cela posé, dans les expressions (28), (29), (30) de  $-\frac{\cos \nu}{r}$ ,  $-\frac{\cos \nu_i}{r_i^2}$ ,  $\frac{d\sigma'}{r}$  et dans celle de la quantité

$$(31) \quad \frac{1}{2Rr_i} = \frac{1}{2R\sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos \omega_i}},$$

qui apparaîtra dans les transformations ultérieures de l'équation fonctionnelle, remplaçons  $\rho$  par  $R(1 + \alpha n)$  et  $\rho'$  par  $R(1 + \alpha n')$ ; si l'on met en évidence le paramètre  $\alpha$ , elles prendront la forme

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\cos \nu}{r} &= \frac{1}{2R} \frac{1 + G_1 \alpha + G_2 \alpha^2}{(1 + H_1 \alpha + H_2 \alpha^2) \sqrt{1 + h_1 \alpha + h_2 \alpha^2}}, \\ -\frac{\cos \nu_i}{r_i^2} &= \frac{K_0 + K_1 \alpha + K_2 \alpha^2}{\sqrt{L_0 + L_1 \alpha + L_2 \alpha^2}^3 (1 + h_1 \alpha + h_2 \alpha^2)}, \\ \frac{d\sigma'}{r} &= R(1 + \alpha n') \sqrt{\frac{1 + h'_1 \alpha + h'_2 \alpha^2}{1 + H_1 \alpha + H_2 \alpha^2}} \frac{\sin \omega d\omega d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}}, \\ \frac{1}{2Rr_i} &= \frac{1}{2R\sqrt{L_0 + L_1 \alpha + L_2 \alpha^2}}, \end{aligned} \right.$$

où  $G_1$ ,  $G_2$  ont les valeurs

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1 &= n + n' + \frac{n - n' + \sin \omega \left( \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right)}{1 - \cos \omega}, \\ G_2 &= \frac{n^2 - nn' \cos \omega + n' \sin \omega \left( \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right)}{1 - \cos \omega}, \end{aligned} \right.$$

et  $H_1, H_2, h_1, h_2, h'_1, h'_2, K_0, K_1, K_2, L_0, L_1, L_2$  les valeurs

$$(33') \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_1 = n + n', & H_2 = \frac{n^2 + n'^2 - 2nn' \cos \omega}{2(1 - \cos \omega)}, \\ h_1 = 2n, & h_2 = n^2 + \frac{\partial n^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial n^2}{\partial \varphi^2}, \\ h'_1 = 2n', & h'_2 = n'^2 + \frac{\partial n'^2}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial n'^2}{\partial \varphi^2}, \\ K_0 = R - \rho_i \cos \omega_i, & K_2 = R n^2, \\ K_1 = (2R - \rho_i \cos \omega_i)n + \rho_i \sin \omega_i \left( \cos \vartheta \frac{\partial n}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right), \\ L_0 = R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i \cos \omega_i, & L_1 = 2Rn(R - \rho_i \cos \omega_i), \quad L_2 = R n^2. \end{array} \right.$$

Maintenant, les formules (18) et (19) du paragraphe I nous permettent de développer les expressions (32) en séries procédant suivant les puissances croissantes de  $\alpha$ . Les développements seront de la forme suivante :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\cos \vartheta}{r} = \frac{1}{2R} \left( 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} b_m x^m \right), \\ -\left( \frac{1}{2Rr_i} + \frac{\cos \vartheta_i}{r_i^2} \right) = \frac{R^2 - \rho_i^2}{2R\sqrt{(R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i \cos \omega_i)^3}} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m x^m, \\ \frac{d\sigma'}{r} = R \left( 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} c_m x^m \right) \frac{\sin \omega d\omega d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}}. \end{array} \right.$$

Le calcul des coefficients  $A_m, b_m, c_m$  serait pénible et n'offrirait d'ailleurs que peu d'intérêt. Nous retiendrons seulement l'expression de  $b_1$ , qui nous servira dans les applications aux sphéroïdes très peu différents de la sphère :

$$(35) \quad b_1 = \frac{n \cos \omega - n' + \sin \omega \left( \cos \vartheta \frac{\partial n}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right)}{1 - \cos \omega}.$$

Revenons à l'équation fonctionnelle (1'), que nous pouvons écrire,

en ajoutant et retranchant à son second membre  $\sum_1^p \frac{q_i}{4\pi R r_i}$ ,

$$e = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{e' \cos \nu}{r} \frac{d\sigma'}{r} + \frac{1}{4\pi R} \sum_1^p \frac{q_i}{r_i} - \frac{1}{2\pi R} \sum_1^p q_i \left( \frac{1}{2R r_i} + \frac{\cos \nu_i}{r_i^2} \right).$$

Substituons-y les séries (34) et décomposons l'intégrale  $\int_{\sigma}$  en deux autres, dont la première correspondra au premier terme  $\frac{1}{2R}$  du développement de  $-\frac{\cos \nu}{r}$  et la seconde aux termes restants. Posons, pour abréger,

$$(36) \quad a_m = b_1 c_{m-1} + b_2 c_{m-2} + \dots + b_m;$$

il viendra

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} e = & \frac{1}{4\pi R} \left[ \int_{\sigma} \frac{e' d\sigma'}{r} + \sum_1^p \frac{q_i}{r_i} + \sum_1^p q_i \frac{R^2 - \rho_i^2}{\sqrt{(R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i \cos \omega_i)^3}} \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e' \sum_{m=1}^{\infty} a_m \alpha^m \frac{\sin \omega d\omega d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}} + \sum_1^p q_i \sum_{m=1}^{\infty} A_m \alpha^m \right]. \end{aligned} \right.$$

Posons maintenant

$$(38) \quad e = e_0 + e_1 \alpha + e_2 \alpha^2 + \dots + e_m \alpha^m + \dots$$

Le terme général  $e_m$  est une fonction des angles  $\theta, \psi$  qu'il s'agit de déterminer; si l'on y remplace  $\theta, \psi$  par  $\theta', \psi'$ ,  $e_m$  se changera en  $e'_m$ , qui deviendra une fonction de  $\omega, \varphi$ , lorsqu'on aura éliminé  $\theta', \psi'$  au moyen des formules de transformation (22).

Dans l'équation (37) substituons les développements de  $e$  et de  $e'$ , et remarquons que la somme  $\int_{\sigma} \frac{e' d\sigma'}{r} + \sum_1^p \frac{q_i}{r_i}$  n'est autre chose que le potentiel  $V$  du sphéroïde. Les deux membres sont deux séries entières

en  $\alpha$ , qui doivent être identiques : on en conclut

$$(39) \quad \begin{cases} e_0 = \frac{1}{4\pi R} \left[ V + \sum_1^p q_i \frac{R^2 - \rho_i^2}{\sqrt{(R^2 + \rho_i^2 - 2R\rho_i \cos \omega_i)^3}} \right], \\ e_m = \frac{1}{4\pi} \left[ \sum_1^p A_m q_i + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \dots + e'_{m-1} a_1) \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}} \right]. \end{cases}$$

Les formules (38) et (39) résolvent le problème proposé. Comme elles expriment chacune des fonctions  $e_m$  à l'aide des fonctions d'indice moindre, elles permettent de calculer ces fonctions de proche en proche ; du moins elles ramènent ce calcul à une suite de quadratures qui, à défaut d'une évaluation exacte, généralement impossible, donnent prise aux méthodes d'approximation indéfinie telles que celle de Gauss. La densité électrique en un point du sphéroïde primitif s'obtient en faisant  $\alpha = 1$  dans la série (38).

Il peut arriver que le sphéroïde donné fasse partie d'une famille naturelle de surfaces dépendant d'un paramètre  $\alpha$  et se réduisant à une sphère pour la valeur zéro de ce paramètre. On développera en série suivant les puissances croissantes de  $\alpha$  le rayon vecteur

$$\rho = R(1 + \alpha n_1 + \alpha^2 n_2 + \dots),$$

et l'on suivra la marche qui vient d'être indiquée. La seule différence consistera en ce que dans les formules (32) figureront actuellement des séries et non des polynômes en  $\alpha$ .

Enfin le rayon vecteur peut dépendre de plusieurs paramètres et devenir constant pour des valeurs nulles de tous ces paramètres : on le développera en série multiple.

### III. — Convergence de la série.

Il reste à examiner les conditions de convergence de la série (38). Nous nous bornerons au cas le plus intéressant, celui où le sphéroïde n'est soumis à aucune influence. Les formules de résolution (39) se



réduisent alors à

$$(40) \quad \begin{cases} e_0 = \frac{V}{4\pi R}, \\ e_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \dots + e'_{m-1} a_1) \frac{\sin \omega d\omega d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}}. \end{cases}$$

Montrons d'abord, ce qui est loin d'être évident au point de vue analytique, que  $e_m$  est toujours fini; il suffit de prouver que la parenthèse  $(e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \dots + e'_{m-1} a_1)$  ne devient jamais infinie, puisque l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \omega d\omega d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}}$$

a la valeur finie  $4\pi$ .

La relation récurrente qui lie les fonctions  $e_m$  de proche en proche montre que cette parenthèse est finie en même temps que les coefficients  $a_m$ . Or ces coefficients, définis par la relation (36), sont des fonctions entières, homogènes et de poids  $m$  des  $b$  et des  $c$ . Si l'on se rappelle les conclusions du paragraphe I, on verra que  $b_m$  est une fonction linéaire, homogène et de poids  $m$ , des quantités  $G_1, G_2, H_1, H_2, h_1, h_2$ , que  $c_m$  est une fonction linéaire, homogène et de poids  $m$ , des quantités  $n', H_1, H_2, h'_1, h'_2$  [formules (33) et (38')]. Parmi ces quantités, les seules qui pourraient devenir infinies, et cela pour  $\omega = 0$ , sont  $G_1, G_2, H_2, h'_2$ . Nous allons faire voir qu'il n'en est rien.

A cause de l'absence supposée de singularités, on peut, dans les environs du point  $M(\rho, \theta, \psi)$ , développer  $n'$  par la formule de Taylor

$$n' = n + \frac{\partial n}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial n}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} \frac{d\theta^2}{2} + \frac{\partial^2 n}{\partial \theta \partial \psi} d\theta d\psi + \frac{\partial^2 n}{\partial \psi^2} \frac{d\psi^2}{2}.$$

Si le point  $M$  est sur la ligne de séparation de deux portions raccordées de surfaces différentes, les dérivées secondes de  $n$  auront en général des valeurs différentes de part et d'autre de cette ligne.

Quand  $\omega$  a une valeur infiniment petite  $d\omega$ ,  $\theta'$  et  $\psi'$  ont des valeurs  $\theta + d\theta$  et  $\psi + d\psi$  très voisines de  $\theta$  et de  $\psi$ . Les formules de transfor-

mation (22) donnent alors pour  $d\theta$  et  $d\psi$  les expressions

$$d\theta = \cos \varphi \, d\omega,$$

$$d\psi = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} d\omega.$$

Si donc on pose

$$u = \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \psi},$$

$$v = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} + 2 \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta \partial \psi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 n}{\partial \psi^2},$$

il viendra  $n' = n + u d\omega + v \frac{d\omega^2}{2}$ . Substituant cette valeur de  $n'$  dans les formules (33) et (33'), où l'on remplacera  $\sin \omega$  par  $d\omega$ ,  $1 - \cos \omega$  par  $\frac{d\omega^2}{2}$ , on trouvera pour valeurs limites de  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $H_2$

$$G_1 = 2n - v, \quad G_2 = \frac{n^2}{2} + u^2 - nv, \quad H_2 = n^2 + u^2.$$

Ainsi, même pour  $\omega = 0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $H_2$  demeurent finis; mais alors ils deviennent indéterminés, puisqu'ils dépendent de l'angle  $\varphi$ , c'est-à-dire du chemin que suit le point  $M'$  pour se rendre au point  $M$ .

Pour prouver que la quantité

$$h'_2 = n'^2 + \frac{\partial n'^2}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial n'^2}{\partial \varphi^2}$$

ne devient pas infinie pour  $\omega = 0$ , il suffit de montrer qu'aux environs du point  $M$   $\frac{\partial n'}{\partial \varphi}$  est du même ordre que  $\sin \omega = d\omega$ . Cela résulte de l'expression précédemment trouvée pour  $n'$ , qui, différenciée par rapport à  $\varphi$ , donne

$$\frac{\partial n'}{\partial \varphi} = d\omega \frac{\partial u}{\partial \varphi} = d\omega \left( -\sin \varphi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right).$$

Ainsi les coefficients  $e_m$  de la série (38) ont toujours des valeurs finies et, de plus, déterminées, car l'indétermination du seul élément qui correspond à  $\omega = 0$  ne peut influer sur les intégrales qui représentent ces coefficients.

Cherchons maintenant une limite inférieure de convergence de la série

$$(38') \quad e = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_m + \dots$$

Si l'on désigne par  $\lambda_m$  la plus grande valeur absolue de  $a_m$ , par  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \dots$  une suite de quantités dont la première est égale à  $e_0$  et dont les autres sont déterminées par la relation

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 \lambda_m + \varepsilon_1 \lambda_{m-1} + \dots + \varepsilon_{m-1} \lambda_1,$$

on voit, en se reportant aux formules (40), que  $\varepsilon_m$  est une limite supérieure de  $e_m$ . La convergence de la série (38') est alors entraînée par celle de la série

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m + \dots$$

On peut remarquer que la série  $\varepsilon$  diverge, si l'un quelconque des  $\lambda_m$  est supérieur ou égal à l'unité. En effet,  $\varepsilon_m$  est visiblement une fonction entière, de poids  $m$ , homogène quant au poids, à coefficients tous entiers et *positifs*, des quantités positives  $\lambda$ . Si  $p$  est un diviseur de  $m$ ,  $\varepsilon_m$  contiendra le terme  $\varepsilon_0 \lambda_p^{\frac{m}{p}}$  avec le coefficient  $+1$ . On peut prendre  $m$  aussi grand qu'on veut; si  $\lambda_p$  est supérieur ou égal à 1,  $\varepsilon_m$  ne tend pas vers zéro.

On reconnaît aisément que la série  $\varepsilon$  converge si  $\sqrt[m]{\lambda_m}$  est constamment inférieur à un nombre plus petit que  $\frac{1}{2}$ . Cette condition exige que le sphéroïde ne soit pas trop différent de la sphère; en effet la grandeur des quantités  $\lambda_m$  dépend de l'excentricité du sphéroïde, puisque  $a_m$  est une fonction homogène, de degré entier  $m$ , de  $n, \frac{\partial n}{\partial \theta}, \frac{\partial n}{\partial \psi}, n', \frac{\partial n'}{\partial \omega}, \frac{\partial n'}{\partial \varphi}$ . Malheureusement le critérium de convergence suffisante qui vient d'être indiqué limite beaucoup plus qu'il n'est nécessaire le domaine dans lequel peut se mouvoir cette excentricité.

Lorsque la série (38') n'est pas convergente, la méthode n'est pas applicable au sphéroïde donné; mais elle convient certainement encore aux sphéroïdes intermédiaires, définis par l'équation  $\rho = R(1 + \alpha n)$ ,

pour toutes les valeurs de  $\alpha$  inférieures à  $\frac{1}{2 \max. \sqrt[m]{\lambda_m}}$ .

## IV. — Charge du sphéroïde.

Revenons à la série

$$(38) \quad e = e_0 + e_1 \alpha + e_2 \alpha^2 + \dots + e_m \alpha^m,$$

et arrêtons-la au terme de degré  $m$  : la densité électrique est évaluée avec une approximation de l'ordre  $m$ . Mais, pour déterminer la charge  $M$  du sphéroïde, avec *la même* approximation, il suffit, comme on va voir, d'évaluer la densité avec une approximation de l'ordre  $m - 1$ .

Supposons que l'on développe suivant les puissances de  $\alpha$  le quotient

$$\frac{d\sigma}{\rho} = (1 + f_1 \alpha + f_2 \alpha^2 + \dots + f_m \alpha^m) \sin \vartheta d\vartheta d\psi.$$

Le potentiel constant a pour valeur au centre

$$V = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (e_0 + e_1 \alpha + \dots + e_m \alpha^m) (f_0 + f_1 \alpha + \dots + f_m \alpha^m) \sin \vartheta d\vartheta d\psi.$$

En vertu de la première relation (40), le potentiel  $V$  a, pour tous les sphéroïdes  $\rho = R(1 + \alpha n)$ , la même valeur  $4\pi R e_0$ . On en conclut que l'égalité précédente est une identité en  $\alpha$  ; d'où, en égalant à zéro le coefficient de  $\alpha^m$  dans le second membre,

$$(41) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (e_0 f_m + e_1 f_{m-1} + \dots + e_m) \sin \vartheta d\vartheta d\psi = 0.$$

La charge électrique a pour expression

$$M = \int_\sigma e d\sigma = \int_\sigma e \frac{d\sigma}{\rho} R(1 + \alpha n) \\ = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (e_0 + e_1 \alpha + \dots + e_m \alpha^m) (1 + f_1 \alpha + \dots + f_m \alpha^m) (1 + \alpha n) \sin \vartheta d\vartheta d\psi.$$

Mais, en vertu de la condition (41), cette expression se réduit à

$$(42) \quad M = R^2 \left[ 4\pi e_0 + \sum_{i=1}^m \alpha^i \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n (e_0 f_{i-1} + e_1 f_{i-2} + \dots + e_{i-1}) \sin \vartheta d\vartheta d\psi \right].$$

La fonction  $e_{i-1}$ , du plus haut indice qui y figure est  $e_{m-1}$ , et non  $e_m$ .

V. — Sphéroïdes très peu différents de la sphère. Sphéroïdes composés.

Supposons le sphéroïde assez peu différent de la sphère pour que les puissances de  $n$  supérieures à la première soient négligeables : c'est le cas traité par Poisson. L'expression (42) donne alors, en y remplaçant  $e_0$  par  $\frac{V}{4\pi R}$ ,

$$(43) \quad M = VR \left( 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n \sin \theta \, d\theta \, d\psi \right).$$

L'intégrale qui figure au second membre est proportionnelle à l'excès du volume du sphéroïde sur celui de la sphère de rayon  $R$ . On en conclut qu'au degré d'approximation adopté, tous les sphéroïdes de même volume qui possèdent la même charge sont au même potentiel.

La série qui représente la densité électrique se réduit à ses deux premiers termes :

$$e = e_0 + e_1 = \frac{V}{4\pi R} \left[ 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a_1 \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}} \right];$$

et, comme en vertu des relations (35) et (36) on a

$$a_1 = b_1 = \frac{n \cos \omega - n' + \sin \omega \left( \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right)}{1 - \cos \omega},$$

il en résulte

$$(44) \quad e = \frac{V}{4\pi R} \left[ 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{n \cos \omega - n' + \sin \omega \left( \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right)}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}} \right].$$

On résout ainsi, par une intégrale définie, le problème que Poisson a résolu au moyen d'un développement en série de fonctions sphériques.

Lorsque le rayon vecteur du sphéroïde est, pour toutes les régions

de la surface, une même fonction des deux angles  $\theta$  et  $\psi$ , nous dirons que le sphéroïde est *simple*; nous dirons qu'un sphéroïde est *composé* s'il est formé de portions raccordées de sphéroïdes simples.

Le problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde composé se simplifie lorsqu'on connaît la distribution de l'électricité sur chacun des sphéroïdes simples, supposés complets, qui composent sa surface.

Pour fixer les idées, nous supposerons que ces sphéroïdes simples sont au nombre de deux seulement. Soient  $n, n_1$  leurs excentricités en un quelconque de leurs points. Désignons par  $e$  la densité électrique en un point de la portion du premier sphéroïde simple conservée dans le sphéroïde composé, pour un potentiel égal à  $V$ ; par  $\varepsilon$  la densité connue au même point du premier sphéroïde simple, supposé complet, pour le même potentiel; par  $e_1, \varepsilon_1$  les quantités analogues à  $e, \varepsilon$  pour le second sphéroïde simple. Je dis que l'on aura

$$(45) \quad \begin{cases} e = \varepsilon + \frac{V}{16\pi^2 R} \iint \frac{n' - n'_1}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}}, \\ e_1 = \varepsilon_1 + \frac{V}{16\pi^2 R} \iint \frac{n'_1 - n'}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}}, \end{cases}$$

la première intégrale double s'étendant à la portion conservée du second sphéroïde simple, et la seconde à la portion conservée du premier.

Pour démontrer les formules (45), il suffit d'observer que l'expression de la densité est

$$e = \frac{V}{4\pi R} \left[ 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{n \cos \omega - \nu' + \sin \omega \left( \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right)}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}} \right],$$

où la quantité  $\nu'$  affecte, suivant la région où se trouve le point  $(\omega, \varphi)$ , l'une des deux formes analytiques  $n', n'_1$ . Si l'on ajoute et retranche l'intégrale

$$\frac{V}{16\pi^2 R} \iint \frac{n'}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}},$$

étendue à la portion supprimée du premier sphéroïde simple, l'expres-

sion précédente s'écrira

$$v = \frac{V}{4\pi R} \left[ 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{n \cos \omega - n' + \sin \omega \left( \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right)}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega d\omega d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}} \right] \\ + \frac{V}{16\pi^2 R} \int \int \frac{n' - n_1}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega d\omega d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}},$$

la seconde intégrale s'étendant à la partie conservée du second sphéroïde. On en conclut la première des formules (45).

L'extension de ces formules au cas où les sphéroïdes composants sont en nombre quelconque est évidente.

#### VI. — Distribution de l'électricité sur un conducteur ovoïde.

Appliquons ces résultats au conducteur ovoïde formé par deux demi-ellipsoïdes de révolution qui se raccordent à l'équateur. Si l'on prend pour origine le centre commun, pour plan des  $\psi$  l'équateur, les équations des deux ellipsoïdes, supposés très peu différents de la sphère, sont

$$(46) \quad n = v \cos^2 \theta, \quad n_1 = v_1 \cos^2 \theta,$$

$v, v_1$  désignant les excentricités aux deux pôles.

Calculons d'abord la charge en fonction du potentiel. Soit  $R$  le rayon équatorial. L'équation (43) donne

$$M = VR \left( 1 + \frac{v}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \vartheta d\vartheta d\psi + \frac{v_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^2 \theta \sin \vartheta d\vartheta d\psi \right), \\ (47) \quad M = VR \left( 1 + \frac{v + v_1}{6} \right).$$

Les densités électriques en deux points situés sur le même méridien à égale distance de l'équateur sont données par les formules (45), qui deviennent

$$(48) \quad e = \varepsilon + \frac{V}{16\pi^2 R} J, \quad e_1 = \varepsilon_1 - \frac{V}{16\pi^2 R} J,$$

si l'on pose

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \frac{n' - n'_1}{1 - \cos \omega} \frac{\sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \omega)}} \\ &= (\nu - \nu_1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta' \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \frac{d\omega}{2} d\varphi, \end{aligned} \right.$$

$\gamma$  désignant le plus petit arc, compris entre le point  $(\theta, \psi)$  et l'équateur, du grand cercle qui passe par le point fixe  $(\theta, \psi)$  et par le point variable  $(\omega, \varphi)$ .

Commençons par évaluer  $\varepsilon$  : c'est la densité électrique au point  $(\theta, \psi)$  du premier ellipsoïde, supposé complet, lorsque le potentiel est égal à  $V$ . Elle est, comme on sait, proportionnelle à la distance du centre au plan tangent mené par le point  $(\theta, \psi)$ . Au degré d'approximation adopté, cette distance est égale à  $R(1 + n)$  ; et, si l'on appelle  $\mu$  la charge, on aura, en appliquant une formule connue,

$$\varepsilon = \frac{\mu R(1 + n)}{4\pi R^2(1 + \nu)} = \frac{\mu}{4\pi R^2} (1 - \nu)(1 + n).$$

D'ailleurs, si dans l'expression (47) on fait  $\nu_1 = \nu$  et par suite  $M = \mu$ , il vient  $\mu = VR\left(1 + \frac{\nu}{3}\right)$ . Il en résulte

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{V}{4\pi R} \left(1 - \frac{2\nu}{3}\right)(1 + n) = \frac{V}{3\pi R} \left(1 - \nu \frac{2 - 3\cos^2 \theta}{3}\right), \\ \varepsilon_1 &= \frac{V}{4\pi R} \left(1 - \frac{2\nu_1}{3}\right)(1 + n_1) = \frac{V}{4\pi R} \left(1 - \nu_1 \frac{2 - 3\cos^2 \theta'}{3}\right). \end{aligned} \right.$$

Passons maintenant au calcul de l'intégrale double (49) ; en y faisant

$$(51) \quad \cos \theta' = \cos \theta \cos \omega - \sin \theta \sin \omega \cos \varphi,$$

elle devient

$$(52) \quad J = (\nu - \nu_1) \left( \cos^2 \theta \int_0^{2\pi} J_1 d\varphi + \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} J_2 \cos^2 \varphi d\varphi - 2 \sin \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} J_3 \cos \varphi d\varphi \right),$$



si l'on pose

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} J_1 &= \int_{\gamma}^{\pi} \frac{\cos^2 \omega \cos \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \frac{d\omega}{2}, \\ J_2 &= \int_{\gamma}^{\pi} \frac{\sin^2 \omega \cos \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \frac{d\omega}{2}, \\ J_3 &= \int_{\gamma}^{\pi} \frac{\sin \omega \cos \omega \cos \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \frac{d\omega}{2}. \end{aligned} \right.$$

Entre  $J_1$  et  $J_2$  existe la relation

$$(54) \quad J_1 + J_2 = \int_{\gamma}^{\pi} \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \frac{d\omega}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - 1,$$

qui permet de conclure  $J_1$  de  $J_2$ . On trouve aisément

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} J_2 &= \frac{8}{3} - 4 \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{4}{3} \sin^3 \frac{\gamma}{2}, \\ J_3 &= -2 \left( \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{\gamma}{2} + \log \tan \frac{\gamma}{4} \right). \end{aligned} \right.$$

Transportons les valeurs (54) et (55) de  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  dans l'expression (49) de  $J$ . Après cette substitution apparaissent certaines intégrales où  $\gamma$  ne figure pas : nous pouvons évaluer celles-là ; pour les autres, il faut exprimer  $\varphi$  en fonction de  $\gamma$ . Or  $\gamma$  est ce que devient  $\omega$  pour  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ . Cette hypothèse, introduite dans la relation (51), donne

$$\cos \varphi = \cot \theta \cot \gamma,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \gamma \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \gamma}} d\gamma.$$

Finalement on trouve

$$(56) \left\{ \begin{aligned} \frac{J}{\nu - \nu_1} &= 2\pi \frac{4 - 15 \cos^2 \theta}{3} + 8 \cos^3 \theta \int_{\frac{\pi}{2} - \theta}^{\frac{\pi}{2} + \theta} \frac{\cos \gamma \log \tan \frac{\gamma}{4}}{\sin^2 \gamma \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \gamma}} d\gamma \\ &+ \frac{8\sqrt{2}}{3} \cos^3 \theta \int_{\frac{\pi}{2} - \theta}^{\frac{\pi}{2} + \theta} \frac{2 + 3 \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} \frac{d\gamma}{\sin \gamma \sqrt{1 - \cos \gamma} \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \gamma}}. \end{aligned} \right.$$

Les deux intégrales définies qui figurent dans l'expression de  $J$  ne peuvent être représentées au moyen des fonctions de l'Algèbre élémentaire; la seconde a la forme d'une période elliptique. Le problème ne pourrait être achevé que par des développements en série que nous ne chercherons pas à effectuer.

La formule (56) est inapplicable au pôle, où l'on a  $\theta = 0$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . Mais, si l'on introduit directement ces hypothèses dans la formule de départ (49), on trouve immédiatement

$$(57) \quad J_p = 2\pi \frac{8\sqrt{2} - 11}{3} (\nu - \nu_1).$$

La formule (56) donnerait un résultat erroné si l'on cherchait à l'appliquer aux points de l'équateur; car, en ces points, l'intégration par rapport à  $\gamma$  doit s'étendre seulement de 0 à  $\pi$ , et non de 0 à  $2\pi$ . Si dans l'expression (49) on fait  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta' = -\sin \omega \cos \varphi$ , on trouve alors pour valeur de  $J$  à l'équateur

$$(58) \quad J_E = \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \omega \cos \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \frac{d\omega}{2} = \frac{4\pi}{3} (\nu - \nu_1).$$

Aux pôles, les formules (50) donnent

$$\varepsilon = \frac{V}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{3} \nu \right), \quad \varepsilon_1 = \frac{V}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{3} \nu_1 \right);$$

à l'équateur,

$$\varepsilon = \frac{V}{4\pi R} \left(1 - \frac{2}{3}\nu\right), \quad \varepsilon_1 = \frac{V}{4\pi R} \left(1 - \frac{2}{3}\nu_1\right).$$

En portant ces valeurs et celles de  $J_p$  (57) et de  $J_e$  (58) dans les formules (48), on trouve :

$$\text{Densité au premier pôle} \dots \frac{V}{4\pi R} \left[1 + \frac{\nu}{3} + \frac{8\sqrt{2-11}}{6}(\nu - \nu_1)\right]$$

$$\text{Densité au deuxième pôle} \dots \frac{V}{4\pi R} \left[1 + \frac{\nu_1}{3} - \frac{8\sqrt{2-11}}{6}(\nu - \nu_1)\right]$$

$$\text{Densité à l'équateur} \dots \frac{V}{4\pi R} \left(1 - \frac{\nu + \nu_1}{3}\right).$$

Comme on devait s'y attendre, la densité électrique reste continue lorsqu'on passe par l'équateur de l'un des demi-ellipsoïdes à l'autre.

## DEUXIÈME PARTIE.

### LES CONDUCTEURS OUVERTS.

#### CHAPITRE I.

##### THÉORIE GÉNÉRALE.

##### I. — Équation caractéristique des conducteurs ouverts.

Nous supposerons la surface ouverte  $S$  dépourvue de toute singularité; telles sont la zone, la calotte sphériques. Pour éviter les longueurs, nous dirons que l'une de ses faces est extérieure et l'autre intérieure.

Soient

$M$  et  $M'$  deux points de la surface  $S$ , supposée conductrice et chargée d'électricité;

$r$  la distance de  $M$  à  $M'$ , en grandeur et direction;

$MN$ , la normale extérieure;

$MN_2 = n$  la normale intérieure au point  $M$ ;

$e_1, e_2$  les densités des couches électriques extérieure et intérieure au même point;

$e'_1, e'_2$  les densités extérieure et intérieure en  $M'$  (ces densités sont partout finies et continues excepté sur les bords);

$Q_i$  un des  $p$  points électrisés qui agissent par influence sur  $S$ ;

$q_i$  sa charge;

$r_i$  la distance de  $M$  à  $Q_i$ .

Supposons qu'on sache résoudre ce problème : trouver la couche de densité  $e_1 + e_2$  en équilibre sur  $S$  sous l'influence des masses fixes données. C'est le problème ordinaire de potentiel de surface posé par Green et par Gauss.

Il reste à répartir cette couche entre les deux faces du conducteur. On va voir que, pour faire ce départ, une quadrature suffit.

La surface conductrice  $S$  résulte de l'aplatissement indéfini d'un conducteur d'épaisseur très petite dont la face externe  $S_1$  et la face interne  $S_2$  tendent vers  $S$  comme limite commune. C'est sur ce conducteur mince que nous allons raisonner.

La normale à  $S$  au point  $M$  perce  $S_1$  et  $S_2$  en deux points  $M_1$  et  $M_2$ . Dans le plan tangent à  $S$  au point  $M$  décrivons de  $M$  comme centre un cercle  $C$  de rayon très petit, quoique très grand par rapport à l'épaisseur  $M_1M_2$ ; projetons ce cercle en  $C_1, C_2$  sur  $S_1, S_2$ .

Les composantes normales de toutes les répulsions qui agissent au point  $M$ , intérieur au conducteur  $S, S_2$ , s'entre-détruisent pour l'équilibre. Sans entrer dans des explications inutiles, nous voyons que les diverses parties du système donnent, suivant la normale intérieure  $n$ , les composantes suivantes :

Le cercle  $C_1$  .....  $+ 2\pi e_1$ ,

Le cercle  $C_2$  .....  $- 2\pi e_2$ ,

Le reste du conducteur ....  $-\int_S \frac{(e'_1 + e'_2) \cos(r, n)}{r^2} dS'$ ,

Les masses inductrices ....  $-\sum_1^p q_i \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^2}$ .

D'où l'équation d'équilibre

$$(59) \quad 2\pi(e_1 - e_2) = \int_S \frac{(e'_1 + e'_2) \cos(r, n)}{r^2} dS' + \sum_1^p q_i \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^2}.$$

Cette équation, dont tout le second membre est connu en vertu des hypothèses, détermine la différence cherchée  $e_1 - e_2$ . Le problème s'achève donc par une quadrature double.

En faisant  $e_2 = 0$ , on retrouve l'équation fonctionnelle qui caractérise les conducteurs fermés.

Voici les conséquences les plus immédiates de la formule (59) :

1° Elle donne une limite supérieure de l'ordre d'infinitude de la densité sur les bords. En effet la différence  $e_1 - e_2$  doit être finie, au moins à une certaine distance du contour. Pour qu'il en soit ainsi, il est aisé de voir que la condition suivante doit être remplie : soient  $M$ ,  $M'$ ,  $M'_0$  trois points du conducteur situés, le premier à distance finie du bord, le second à distance infiniment petite du bord, le troisième sur le bord même au pied de la perpendiculaire abaissée du second sur le contour ; si l'on pose  $MM' = r$ ,  $MM'_0 = r_0$ ,  $M'M'_0 = \delta$ , la somme  $e'_1 + e'_2$ , infiniment grande en  $M'$ , doit être d'un ordre inférieur à celui de  $\frac{1}{r_0 - r}$ , c'est-à-dire à celui de  $\frac{1}{\delta}$ . On en conclut facilement que la charge ne peut s'accumuler en quantité finie sur le contour, bien que la densité y soit infinie. Tous les exemples connus prouvent que, près des bords, la densité est du même ordre que  $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ .

2° Si le conducteur est convexe et soustrait à toute influence, la densité électrique est plus forte en tout point de la face externe qu'au point correspondant de la face interne ; car, en vertu de la convexité supposée, tous les éléments qui entrent dans l'intégrale de la formule (59) sont positifs. De là résulte que la charge externe est plus grande que la charge interne.

## II. — Répartition de la charge entre les deux faces.

Cette dernière propriété appartient à un grand nombre de conducteurs non convexes. Imaginons une surface ouverte  $S$ , limitée par un

contour fermé K. Soit  $\omega$  l'angle solide sous lequel on voit le contour K d'un point quelconque de l'espace. Concevons la surface limitée lieu des points  $\omega = 2\pi$  et la surface illimitée lieu des points  $\omega = 0$ , qui se raccordent le long de K, et supposons que S ne coupe ni l'une ni l'autre de ces surfaces.

La surface conductrice S peut être regardée comme la limite d'un conducteur extrêmement mince, dont la face extérieure  $S_1$  et la face intérieure  $S_2$  se coupent suivant l'arête saillante K. Soient  $\mu = e dS$ ,  $\mu' = e' dS$  deux éléments électriques correspondants de  $S_1$  et de  $S_2$ . D'après un théorème de Gauss, les sommes des composantes normales des répulsions exercées sur S par ces deux éléments ont respectivement pour valeurs  $\mu\omega$  et  $-\mu(4\pi - \omega)$ . Quant aux éléments situés sur l'arête vive, dont l'action serait facile à évaluer, il est inutile de s'en préoccuper, car nous venons de montrer que leur totalité ne représente pas une quantité finie d'électricité. En exprimant que les composantes normales des répulsions exercées sur la surface S, intérieure au conducteur mince, par toute l'électricité répandue sur les faces  $S_1$ ,  $S_2$  ont une somme égale à 0, on a

$$(60) \quad \sum \mu\omega = \sum \mu'(4\pi - \omega).$$

Désignons par  $m$  la charge externe, par  $m'$  la charge interne, par M la charge totale, par  $\omega_1$  le maximum et par  $\omega_2$  le minimum de  $\omega$ . L'égalité (60) donne lieu aux deux inégalités

$$(61) \quad m\omega_1 > m'(4\pi - \omega_1), \quad m\omega_2 < m'(4\pi - \omega_2),$$

d'où

$$(62) \quad \frac{\omega_2}{4\pi} < \frac{m'}{M} < \frac{\omega_1}{4\pi}.$$

Il en résulte  $m > m'$ . On reconnaît aisément que cette conclusion s'applique *a fortiori* à tout conducteur S qui couperait la surface  $\omega = 0$ , sans couper la surface  $\omega = 2\pi$ .

Comme première application des formules précédentes, proposons-nous de déterminer deux limites inférieure et supérieure du rapport  $\frac{m'}{M}$  pour une calotte conductrice résultant de la section d'un ellipsoïde de

révolution allongé par le plan d'un parallèle. Soient  $\alpha$  l'angle du plan de base avec le plan tangent tout le long du contour,  $\beta$  le demi-angle au sommet du cône de révolution sous lequel le contour est vu du sommet de la calotte. Les angles solides correspondants sont  $2\alpha$  et  $2\pi(1 - \cos\beta)$ . Des considérations géométriques assez simples montrent que ce sont là le maximum et le minimum désignés par  $\omega$ , et  $\omega_2$ . La formule (62) donne alors

$$(63) \quad \frac{1 - \cos\beta}{2} < \frac{m'}{M} < \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Comme deuxième application, cherchons à construire, sur un contour donné K, une surface conductrice S pour laquelle le rapport  $\frac{m'}{M}$  ait une valeur donnée  $\lambda$ , plus petite que 2. L'équation (60) montre qu'il suffit de prendre pour S le lieu des points d'où l'on voit le contour K sous l'angle constant  $4\pi\lambda$ . En particulier, si l'on veut que la charge interne soit égale à la charge externe, l'angle en question sera égal à  $2\pi$ .

Si sur le contour K on construit, en dessus, la surface  $\omega = 4\pi\lambda$  et, en dessous, la surface complémentaire  $\omega = 2\pi - 4\pi\lambda$ , ces deux surfaces se raccordent; et, si l'on appelle  $m''$  la charge répandue sur la seconde, le charge totale conservant la même valeur M que précédemment, on trouve, en exprimant que la somme des composantes normales des répulsions électriques est nulle sur toute surface intérieure au conducteur fermé et s'appuyant sur le contour K,

$$\frac{m''}{M} = 2\lambda,$$

d'où l'on conclut, puisque  $\frac{m'}{M} = \lambda$ ,

$$(64) \quad m' = \frac{m''}{2}.$$

Si donc on supprime le segment inférieur et qu'on restitue la charge de ce segment au segment supérieur, cette charge se partage en deux parties égales entre les deux faces du segment conservé.

Cette propriété appartient à toute surface fermée percée de très pe-

tites ouvertures de forme quelconque et en nombre quelconque  $p$ . Supposons d'abord la surface intacte. En appelant  $m'_i$  la charge portée par la  $i^{\text{ème}}$  calotte, non encore supprimée,  $\omega_i$  l'angle sous lequel on voit cette calotte d'un point quelconque de la surface portant la charge  $\mu$ , on trouve, par des considérations analogues à celles dont nous venons de faire usage,

$$(65) \quad \sum_1^p \mu \omega_i = 2\pi \sum_1^p m'_i.$$

Supprimons maintenant toutes les calottes et conservons la même charge totale : l'élément électrique, qui était  $\mu$  en un point extérieur, devient  $\mu(1 + \varepsilon)$ ; à l'intérieur, de 0 il devient  $\mu'$ , et l'on aura

$$\sum_1^p (\mu + \varepsilon\mu) \omega_i = \sum_1^p \mu' (4\pi - \omega_i)$$

ou

$$\sum_1^p \mu \omega_i = 4\pi \sum_1^p m'_i - \sum_1^p (\varepsilon\mu + \mu') \omega_i.$$

On doit admettre que  $\varepsilon\mu$  et  $\mu'$  sont du même ordre de grandeur (pour la sphère, comme nous le verrons, on a  $\varepsilon\mu = -\mu'$ ); il en résulte,  $\omega_i$  étant infiniment petit, que dans l'équation précédente le second terme du deuxième membre est négligeable vis-à-vis du premier :

$$(66) \quad \sum_1^p \mu \omega_i = 4\pi \sum_1^p m'_i.$$

La comparaison entre (65) et (66) donne

$$(67) \quad \sum_1^p m'_i = \frac{1}{2} \sum_1^p m'_i, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Les principes que nous établirons plus tard permettent d'affirmer que la distribution électrique sur une surface percée d'ouvertures très petites en nombre quelconque résulte de la superposition des distri-



butions sur cette même surface percée d'une ouverture seulement : on a donc séparément  $m'_i = \frac{1}{2} m''_i$ .

On peut vérifier ce résultat, par un calcul direct, sur une sphère percée d'une petite ouverture circulaire, en prenant pour point de départ l'expression de la densité électrique sur la calotte sphérique donnée par sir W. Thomson (<sup>1</sup>). On reconnaîtra de plus que la charge intérieure se concentre presque tout entière sur les bords de la petite ouverture, de sorte que le plan d'épreuve, introduit à l'intérieur de la sphère creuse, ne révélera aucune trace d'électricité.

### III. — Conducteurs ouverts de forme sphérique. Disques plans.

Revenons à l'équation fondamentale (59) et appliquons-la à un conducteur formé par une portion de surface sphérique limitée par un ou plusieurs contours de forme quelconque. Nous nous dispenserons de développer les calculs, parce qu'ils sont de tout point semblables à ceux que nous avons effectués dans la première Partie (Chap. I, § II) pour déterminer l'influence d'un point électrisé sur une sphère complète.

Soient  $V$  le potentiel du conducteur ouvert;  $f$  le diamètre de la sphère dont il fait partie; en le supposant soustrait à toute influence, on trouve

$$(68) \quad e_1 - e_2 = \frac{V}{2\pi f}.$$

Donc, sur un conducteur sphérique isolé, la densité électrique en un point quelconque de la face externe surpasse la densité au point opposé de la face interne d'une quantité constante.

Cette propriété subsiste pour un nombre quelconque de conducteurs ouverts appartenant géométriquement à la même sphère; il suffit, dans la formule (68), de remplacer  $V$  par la somme  $\Sigma V$  de leurs potentiels: on voit que l'excès  $e_1 - e_2$  est le même pour tous les conducteurs, quels que soient leurs potentiels respectifs.

Considérons maintenant un conducteur sphérique soumis à l'in-

---

(<sup>1</sup>) *Reprint*, p. 185; 1872.

fluence d'un point électrisé de charge  $q_1$ , dont la puissance par rapport à la sphère de diamètre  $f$  sera désignée par  $p_1$ . L'équation (59) donne

$$(69) \quad e_1 - e_2 = \frac{V}{2\pi f} - \frac{q_1 p_1}{2\pi f r_1^3}.$$

L'excès  $e_1 - e_2$  est égal à la densité de la distribution qui serait induite par le point électrisé sur la sphère complète, supposée au même potentiel que le conducteur ouvert. Si le point électrisé est situé sur la portion de la sphère laissée vide par le conducteur et que ce conducteur communique avec le sol ( $V = 0$ ), la densité est la même aux points en regard des deux faces. S'il y a en présence plusieurs conducteurs appartenant à la même sphère, il suffira, dans la formule (69), de remplacer  $V$  par  $\Sigma V$ .

Du cas d'un conducteur sphérique on passe à celui d'un disque plan en faisant  $f = \infty$ ,  $p_1 = \infty$ ,  $\lim \frac{p_1}{f} = h_1$ ,  $h_1$  désignant la distance du point électrisé au plan du disque. On obtient ainsi

$$(70) \quad e_1 - e_2 = -\frac{q_1 h_1}{2\pi r_1^3}.$$

### III. — Influence de masses fixes sur les conducteurs ouverts. Réduction du problème de la distribution électrique.

Nous avons signalé dans l'Introduction la difficulté presque toujours insurmontable du problème *complet* de l'équilibre électrique d'un conducteur, problème qui consiste à déterminer la distribution de l'électricité pour toutes les positions possibles des masses inductrices. La difficulté dont nous parlons peut être notablement réduite dans le cas très étendu que voici.

Le conducteur ouvert  $S$  est un fragment d'une surface conductrice fermée  $\Sigma$ , pour laquelle le problème de la distribution électrique a été, par hypothèse, résolu *complètement*. Il s'agit de déterminer l'influence sur  $S$  d'une masse électrique occupant dans l'espace une position *quelconque*. Nous allons montrer que cette influence peut être calculée au moyen d'une quadrature, quand on connaît seulement

l'action sur le conducteur S d'un point courant du fragment S' complémentaire de S ( $S + S' = \Sigma$ ).

Soit en effet  $\varepsilon$  la densité *connue* de la distribution induite par les masses données en un point M de la surface fermée  $\Sigma$ , supposée au potentiel V. Prenons ce point M sur la région S'. On connaît par hypothèse la distribution induite par l'élément électrique  $-\varepsilon dS'$  sur le conducteur S, supposé au potentiel zéro. En vertu du principe de la superposition des influences, on peut en conclure, par intégration, la distribution  $e$  appelée sur S par la charge totale  $-\int_{S'} \varepsilon dS'$  du fragment complémentaire S'. Répandons maintenant sur toute la surface  $\Sigma$  une charge de densité  $+\varepsilon$ . La région S' est ramenée à l'état neutre, et le conducteur S se trouve en équilibre électrique, avec la densité  $e + \varepsilon$  et le potentiel V, sous l'action de la masse donnée. Il ne reste plus qu'à répartir la couche  $e + \varepsilon$  entre les deux faces, conformément à la formule (59).

S'il n'y a pas de masse inductrice, la méthode indiquée donne la distribution électrique de potentiel V en équilibre d'elle-même sur le conducteur S.

Comparons maintenant la valeur des densités électriques au même point du conducteur complet  $\Sigma$  et du conducteur ouvert S, pour un même potentiel V. Sur  $\Sigma$  la densité est  $\varepsilon$ , sur S,  $e + \varepsilon$  : elle est plus forte sur S que sur  $\Sigma$ .

L'inverse a lieu pour les charges :

$$\text{Charge de } \Sigma \dots\dots\dots \int_{\Sigma} \varepsilon d\Sigma = \int_S \varepsilon dS + \int_{S'} \varepsilon dS',$$

$$\text{Charge de S} \dots\dots\dots \int_S (e + \varepsilon) dS = \int_S \varepsilon dS + \int_S e dS.$$

Or la charge  $\int_S e dS$ , induite sur S par la charge  $-\int_{S'} \varepsilon dS'$  répandue sur S', est plus petite que cette dernière en valeur absolue. Si donc on détache un fragment d'une surface conductrice fermée et qu'on maintienne le fragment conservé au même potentiel, la charge se trouve diminuée.



## CHAPITRE II.

## SURFACES CONDUCTRICES A CONTOUR MULTIPLE.

## I. — Réduction au cas des conducteurs à contour simple.

Nous arrivons à la réduction importante dont il a été parlé dans l'Introduction, et qui ramène l'équilibre électrique des surfaces conductrices à contour multiple à celui des surfaces à contour simple. Pour abréger, nous appellerons *calotte* toute surface ouverte à contour simple, *zone* toute surface ouverte à double contour, que les bords soient des lignes planes ou gauches.

Je rappelle qu'un point électrisé induit sur un conducteur au potentiel zéro une distribution dont la densité a partout le même signe; ce signe est contraire à celui de la charge du point. Ceci nous permettra, dans ce qui va suivre, de mettre en évidence le signe des densités. Dorénavant, quand nous parlerons de l'influence d'un point électrisé sur un conducteur, il sera sous-entendu que ce conducteur est au potentiel zéro.

Considérons une surface fermée  $\Sigma$  divisée en trois parties : deux calottes C et C' et une zone B. Nous pouvons, d'ailleurs, concevoir d'autres divisions de la surface  $\Sigma$ ; supposons-la doublement connexe, ayant la forme d'un tore. Coupons-la par deux plans, dont l'un détache une calotte C, l'autre un tube courbé à double contour C'; la partie restante B est une surface tronquée à triple contour. Les raisonnements subséquents s'appliquent aux fragments C, C', B, tels qu'ils viennent d'être définis.

Supposons que l'on connaisse : 1° la distribution électrique sur la surface  $\Sigma$ , soustraite à toute influence; 2° l'influence sur la calotte B + C d'un point électrisé occupant successivement toutes les positions possibles sur la calotte C' complémentaire de B + C; 3° l'influence sur

B + C' d'un point courant de C. De ces données on peut, comme on va voir, conclure la distribution électrique en équilibre d'elle-même sur la zone B.

Soit  $e$  la densité électrique (') en un point de  $\Sigma$  pour un potentiel égal à  $V$ . Répandons sur C et C' une couche de densité  $-e$ . La couche  $-e$  répandue sur C' induit sur B + C une couche dont nous désignerons la densité par  $\beta_1$  en un point de B, et par  $\gamma_1$  en un point de C. La couche répandue sur C appelle sur B + C' une distribution de densité  $\beta'_1$  en un point de B,  $\gamma'_1$  en un point de C'. Par hypothèse, on sait calculer, et cela au moyen d'une intégration,  $\beta_1, \gamma_1, \beta'_1, \gamma'_1$ . Distribuons enfin sur  $\Sigma$  une couche de densité  $+e$ . La superposition de ces divers états d'équilibre donne le résultat suivant : la zone B est en équilibre électrique, avec la densité  $e + \beta_1 + \beta'_1$  et le potentiel  $V$ , sous l'influence des couches  $\gamma_1$  et  $\gamma'_1$  répandues sur C et sur C'.

Une couche de densité  $-\gamma'_1$  répandue sur C induirait sur B + C une distribution  $\beta_2, \gamma_2$ ; une couche  $-\gamma_1$  répandue sur C induirait sur B + C' une distribution  $\beta'_2, \gamma'_2$ , que l'on sait calculer. Superposons ces nouveaux équilibres au précédent : la zone B est alors en équilibre électrique, avec la densité  $e + \beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2$  et le potentiel  $V$ , sous l'influence des couches  $\gamma_2$  et  $\gamma'_2$  répandues respectivement sur C et sur C'.

Continuons de cette manière indéfiniment. Les couches qui, après la  $n^{\text{ième}}$  opération, restent sur C et sur C' ont des densités  $\gamma_n, \gamma'_n$  qui tendent vers zéro, comme nous l'allons prouver.

En vertu d'une propriété bien connue, la charge  $-C'_{n-1}$  qui réside sur C après la  $n - 1^{\text{ième}}$  superposition induit sur B + C une charge totale  $B_n + C_n$  plus petite que  $C'_{n-1}$ . On a, par suite, les deux séries d'inégalités

$$\begin{array}{ll} B_1 + C_1 < C'_0, & B'_1 + C'_1 < C_0, \\ B_2 + C_2 < C'_1, & B'_2 + C'_2 < C_1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ B_n + C_n < C'_{n-1}, & B'_n + C'_n < C_{n-1}, \end{array}$$

---

(1) Ou plutôt la somme des densités en deux points opposés des deux faces externe et interne du conducteur. C'est en ce sens qu'il faut entendre le mot *densité* dans tout ce qui va suivre.

que l'on peut écrire

$$\begin{array}{ll} B_1 + C_1 < C'_0, & B'_1 + C'_1 < C_0, \\ B'_2 + C'_2 < C_1, & B_2 + C_2 < C'_1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ B'_n + C'_n < C_{n-1}, & B_n + C_n < C'_{n-1}. \end{array}$$

On en déduit d'abord, en supposant  $n$  pair pour fixer les idées,

$$\begin{array}{l} C_0 > C'_1 > C_2 > \dots > C_n, \\ C'_0 > C_1 > C'_2 > \dots > C'_n; \end{array}$$

d'où l'on conclut que les différences  $C_0 - C_n$ ,  $C'_0 - C'_n$  sont positives et finies. On en déduit ensuite, par voie d'addition,

$$(71) \quad B_1 + B'_1 + B_2 + B'_2 + \dots + B_n + B'_n < C_0 - C_n + C'_0 - C'_n,$$

ce qui montre que la série  $\sum_1^\infty (B_n + B'_n)$  est convergente. Il en est de même *a fortiori* des deux séries  $\sum_1^\infty B_n$  et  $\sum_1^\infty B'_n$ . Donc  $B_n$  et  $B'_n$  tendent vers zéro.

Remarquons maintenant que la charge  $-C'_{n-1}$  induit sur l'ensemble de la zone B et de la calotte C la charge totale  $B_n + C_n$ .

Si  $C_n$  ne tendait pas vers zéro, le conducteur continu B + C serait en équilibre électrique avec une charge différente de zéro sur la région C et une charge nulle sur la région B, ce qui est impossible <sup>(1)</sup>.

Ce qui est vrai des charges l'est évidemment des densités :  $\gamma_n$  et  $\gamma'_n$  tendent vers zéro ; les séries  $\sum_1^\infty \beta_n$  et  $\sum_1^\infty \beta'_n$  sont convergentes.

On peut observer en passant que, si dans l'inégalité (71) on fait  $n = \infty$  et qu'on ajoute aux deux membres  $B_0$ , charge de la zone corres-

---

(<sup>1</sup>) Car le potentiel, nul sur le conducteur B + C (où il est maximum), est négatif en dehors. En passant par la région B, supposée sans charge aucune, il se continuerait sans discontinuité pour aucune de ses dérivées. Dès lors, si d'un point de B comme centre on décrit une petite sphère, la valeur du potentiel au centre, moyenne entre les valeurs aux divers points de la surface sphérique, serait négative.

pendant à la distribution de densité  $e$ , on aura

$$(72) \quad B_0 + B_1 + B'_1 + B_2 + B'_2 + \dots < B_0 + C_0 + C'_0,$$

c'est-à-dire que, pour un même potentiel  $V$ , la charge de la zone  $B$  est inférieure à celle de la surface fermée  $\Sigma$  dont cette zone a été détachée (théorème déjà démontré).

De ce qui précède nous concluons que la zone  $B$  est d'elle-même en équilibre électrique, au potentiel  $V$ , avec la densité

$$(73) \quad e + \beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2 + \dots + \beta_n + \beta'_n + \dots$$

Il ne reste plus qu'à répartir la distribution trouvée entre les deux faces de la zone. Il sera bon de faire ce départ pour les couches successives que représentent les termes de la série (73).

On peut, d'après les mêmes principes, déterminer l'influence sur la zone  $B$  d'un point électrisé de charge  $q$  situé sur l'une des calottes  $C$  ou  $C'$ , sur  $C'$  par exemple. Ce point appelle sur  $B + C$  une distribution de densité  $-b_1, -c_1$ . La couche  $b_1$  répandue sur  $C$  induirait sur  $B + C'$  une couche de densité  $-b'_1, -c'_1$ . La couche  $b'_1$  répandue sur  $C'$  induirait sur  $B + C$  une couche de densité  $-b_2, -c_2$ , et ainsi de suite. Un raisonnement calqué sur celui du cas précédent prouverait que la zone  $B$  est en équilibre électrique, au potentiel zéro, avec la densité

$$-(b_1 + b'_1 + b_2 + b'_2 + \dots),$$

sous l'influence de la charge  $q$  concentrée au point considéré de la calotte  $C'$ .

Si maintenant on connaît l'influence sur la surface fermée  $\Sigma$  d'un point électrisé situé d'une manière quelconque dans l'espace, on pourra, du résultat qui précède et d'un théorème démontré précédemment (Chap. I, § III), déduire l'influence du même point sur la zone  $B$ . Le problème *complet* de la distribution électrique sera résolu pour cette zone.

Considérons enfin une surface conductrice  $B$  à  $n$  contours; elle résulte d'une surface fermée  $\Sigma$  par l'ablation de  $n$  calottes  $C, C', C'', \dots, C^{(n-1)}$ . Supposons que l'on connaisse : 1° la distribution électrique en équilibre sur  $\Sigma$ ; 2° l'influence d'un point quelconque de l'une des calottes  $C, C', C'', \dots, C^{(n-1)}$ , sur le conducteur obtenu en détachant de  $\Sigma$

cette seule calotte; on pourra résoudre le problème de l'équilibre électrique du conducteur à  $n$  contours B. Il n'y a pas lieu d'insister sur cette facile généralisation.

Ainsi s'opère la réduction que nous avons en vue. Un contour de plus dans la surface du conducteur amène deux séries infinies de quadratures à effectuer. On conçoit alors combien la solution du problème de la distribution de l'électricité sur une zone sphérique doit être compliquée, comparée à la solution si simple que sir W. Thomson a donnée du même problème pour la calotte sphérique. Dans le passage de la calotte à la zone, les difficultés se multiplient dans la même mesure que lorsqu'on passe d'une sphère unique à deux sphères électrisées.

Nous avons vu que, pour un conducteur sphérique de diamètre  $f$  au potentiel  $V$ , la différence entre les densités externe et interne est constante et égale à  $\frac{V}{2\pi f}$ ; il en résulte les expressions suivantes de ces densités :

$$\text{Densité extérieure... } \frac{V}{2\pi f} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (\beta_n + \beta'_n),$$

$$\text{Densité intérieure... } \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (\beta_n + \beta'_n).$$

Sir W. Thomson a déterminé l'influence sur une calotte sphérique d'un point électrisé situé sur la calotte complémentaire. On peut donc aborder le problème de la distribution électrique sur une sphère percée d'ouvertures circulaires en nombre quelconque, et en particulier sur une zone proprement dite.

### CHAPITRE III.

#### DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UNE ZONE SPHÉRIQUE.

##### I. — Formules de résolution.

Coupons la figure par un plan méridien. La base supérieure de la zone a pour trace sur ce plan la corde AA' et la base inférieure la corde



BB'. Soient C, C' les pôles supérieur et inférieur des deux cercles de base. La zone AA'B'B est obtenue en détachant de la sphère les deux calottes CAB, C'A'B'. Soient P un point de la zone, Q un point de la première calotte, Q' un point de la seconde. Posons

$$\begin{array}{llllll} \text{CA} = a, & \text{CA}' = a', & \text{CP} = r, & \text{CQ} = q, & \text{C'Q}' = q', & \text{CC}' = f. \\ \text{C'A} = a, & \text{C'A}' = a', & \text{C'P}' = r', & & & \end{array}$$

Pour appliquer la théorie qui vient d'être exposée, il faut connaître la densité de la distribution appelée par un élément électrique situé au point Q de la calotte CAB sur la calotte complémentaire C'AB, supposée au potentiel zéro.

Si l'on appelle  $\psi$  l'angle des deux plans méridiens CPC', CQC', l'élément de surface au point Q a pour expression  $q dq d\psi$ . La densité de la distribution induite par la charge élémentaire  $hq dq d\psi$  est la même sur les deux faces de la calotte CAB, en un point quelconque P; elle a pour expression (si on la double, afin d'ajouter les charges des deux faces)

$$(74) \quad \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{a^2 - q^2}{r^2 - a^2}} \frac{hq dq d\psi}{\overline{\text{QP}}^2},$$

(voir THOMSON, *Reprint*, p. 183; 1872). Si l'on remplace  $\overline{\text{QP}}^2$  par sa valeur en fonction de  $r, q, \psi$  et qu'on intègre par rapport à  $\psi$  de 0 à  $2\pi$ , on aura la densité induite au point P par une charge uniforme répandue sur tout le parallèle Q, savoir

$$(75) \quad \frac{h}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{\sqrt{a^2 - q^2}}{r^2 - q^2} d(q^2).$$

Cela posé, une couche de densité  $\gamma_m$  répandue sur la calotte CAB induira au point P de la calotte C'AB la densité

$$(76) \quad \beta_{m+1} = \int_0^a \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{\sqrt{a^2 - q^2}}{r^2 - q^2} d(q^2),$$

et au point Q' de la même calotte, une densité que l'on trouve facilement égale à

$$(77) \quad \gamma'_{m+1} = \int_0^a \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - q'^2}} \frac{\sqrt{a^2 - q'^2}}{f^2 - q'^2 - q'^2} d(q'^2).$$

Posons, pour simplifier,

$$(78) \quad \begin{cases} a^2 = \alpha, & a^2 - q^2 = x, & r^2 - a^2 = y, \\ a^2 = \alpha', & a'^2 - q'^2 = x', & r'^2 - a'^2 = y', \\ a^2 - a'^2 = \alpha'^2 - \alpha^2 = f^2 - a^2 - a'^2 = 1; \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} r^2 - q^2 &= x + y, & a^2 - q^2 &= 1 + x, \\ r'^2 - q'^2 &= x' + y', & a'^2 - q'^2 &= 1 + x', \\ f^2 - q^2 - q'^2 &= 1 + x + x'. \end{aligned}$$

On aura, pour résoudre le problème, les formules

$$(79) \quad \beta'_{m+1} = \int_0^{\alpha'} \frac{\gamma'_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y'}} \frac{\sqrt{x'}}{y' + x'} dx', \quad \beta_{m+1} = \int_0^{\alpha} \frac{\gamma'_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y'}} \frac{\sqrt{x'}}{y' + x'} dx',$$

$$(80) \quad \gamma'_{m+1} = \int_0^{\alpha} \frac{\gamma'_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x'}} \frac{\sqrt{x}}{1+x+x'} dx, \quad \gamma_{m+1} = \int_0^{\alpha'} \frac{\gamma'_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{\sqrt{x'}}{1+x+x'} dx',$$

auxquelles il faut adjoindre celles-ci

$$(81) \quad \gamma_0 = \gamma'_0 = e = \frac{V}{2\pi f}.$$

Les limites des quantités  $x, x', y, y'$  sont données par le Tableau :

$$(82) \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x' \leq \alpha', & 0 \leq y' \leq 1. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous supposons  $\alpha$  et  $\alpha'$  plus petits que l'unité, c'est-à-dire la zone plus grande que l'une et l'autre des calottes CAB, C'A'B'. A cette condition, les développements en série auxquels nous allons parvenir seront convergents.

## II. — Calcul de $\gamma'_{m+1}$ .

Le problème consiste à déterminer  $\beta'_m$  et  $\beta_m$ ; mais il convient d'abord de chercher la forme des inconnues auxiliaires  $\gamma'_m, \gamma_m$ , qui ne deviennent jamais infinies. Nous allons voir que ces inconnues sont développables en séries triples ordonnées suivant les puissances entières de  $x$  (ou  $x'$ ),  $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha'}$ . Ces trois quantités sont plus petites que 1 : si nous

appelons *ordre d'un terme* la somme des exposants de  $x, \alpha, \alpha'$  dans ce terme, nous reconnaitrons que le premier terme de  $\gamma_m$  est de l'ordre  $m + \frac{m}{2}$ ; c'est, à un facteur numérique près,

$$(83) \quad A_m = \begin{cases} \alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Posons donc

$$(84) \quad \gamma_m = \frac{e}{\pi^m} A_m \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\infty} \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') x^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'},$$

et cherchons si  $\gamma'_{m+1}$  est susceptible d'une expression de la même forme

$$(85) \quad \gamma'_{m+1} = \frac{e}{\pi^{m+1}} A'_{m+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\infty} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') x'^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'},$$

$$(86) \quad A'_{m+1} = A_m \alpha \sqrt{\alpha} = \begin{cases} \alpha^{\frac{m}{2}+1} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}+1} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \alpha^{\frac{m+1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m+1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer le coefficient numérique  $\Phi'_{m+1}$  en fonction de  $\Phi_m$ . On peut remarquer qu'en vertu de la symétrie entre  $\alpha$  et  $\alpha'$  on a l'égalité

$$(87) \quad \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') = \Phi'_m(\nu, \lambda', \lambda).$$

Notre analyse montrera que  $\Phi_m(\nu, \lambda, \lambda')$  est une fonction rationnelle des arguments entiers  $\nu, \lambda, \lambda'$ .

Pour calculer  $\Phi'_{m+1}$  revenons à la formule

$$(80) \quad \gamma'_{m+1} = \int_0^\alpha \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x'}(1+x+x')} dx.$$

Si l'on développe  $\frac{1}{1+x+x'}$  et  $\frac{1}{\sqrt{1+x'}}$  suivant les puissances croissantes de  $x'$ , le terme de degré  $i-1$  dans le premier développement

et le terme de degré  $\nu - i + 1$  dans le second seront respectivement

$$(88) \quad (-1)^{i-1} \frac{x'^{i-1}}{(1+x)^i}, \quad (-1)^{\nu-i+1} \frac{1.3 \dots [2(\nu-i)+1]}{1.2 \dots (\nu-i+1)} \frac{x'^{\nu-i+1}}{2^{\nu-i+1}}.$$

On a donc, en convenant que  $\frac{1.3 \dots [2(\nu-i)+1]}{1.2 \dots (\nu-i+1)} = 1$  pour  $i = \nu + 1$ ,

$$(89) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x'}(1+x+x')} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} x'^{\nu} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{1.3 \dots [2(\nu-i)+1]}{1.2 \dots (\nu-i+1)} \frac{(1+x)^{-i}}{2^{\nu-i+1}};$$

et pour toutes les valeurs de  $x'$ , qui, d'après les hypothèses, sont comprises entre 0 et 1, cette série est absolument convergente, comme les deux séries dont elle est le produit.

La substitution de la série (89) dans l'expression (80) donne

$$(90) \quad \gamma'_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} x'^{\nu} \int_0^x \frac{\gamma_m}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{1.3 \dots [2(\nu-i)+1]}{1.2 \dots (\nu-i+1)} \frac{(1+x)^{-i}}{2^{\nu-i+1}} \sqrt{x} dx.$$

En développant  $(1+x)^{-i}$ , on obtient une série absolument convergente entre  $x = 0$  et  $x = 1$ , et dont le terme de degré  $j$  est

$$(-1)^j \frac{i(i+1) \dots (i+j-1)}{1.2 \dots j} x^j.$$

Si donc on pose

$$(91) \quad \psi(\nu, j) = \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{i(i+1) \dots (i+j-1)}{1.2 \dots j} \frac{1.3 \dots [2(\nu-i)+1]}{1.2 \dots (\nu-i+1)} \frac{(-1)^j}{2^{\nu-i+1}},$$

en convenant que, pour  $j = 0$ ,  $\frac{i(i+1) \dots (i+j-1)}{1.2 \dots j} = 1$ , on aura

$$(92) \quad \gamma'_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} x'^{\nu} \int_0^x \frac{\gamma_m}{\pi} \sum_{j=0}^{j=\infty} \psi(\nu, j) x^j \sqrt{x} dx.$$

Nous avons supposé  $\gamma_m$  exprimable par une série triple de la forme (84). Cette série se réduit, pour  $\gamma_0$ , au seul terme constant  $c = \frac{V}{2\pi f}$ , en vertu de la condition (81). Les transformations que nous allons

faire subir au second membre de l'expression (92) amèneront alors pour  $\gamma'_1$  une série absolument convergente, comme on pourra s'en convaincre en suivant les opérations une à une. Il en sera de même pour  $\gamma_1$ ; la série  $\gamma_1$  étant absolument convergente, les mêmes transformations donneront pour  $\gamma'_2$  une série absolument convergente, et ainsi de suite.

Prenons dans  $\gamma_m$  le terme  $\frac{e}{\pi^m} A_m \Phi_m(n, l, l') x^n \alpha' \alpha''$ , et dans l'expression de  $\gamma'_{m+1}$  mettons en évidence sous le signe  $\int$  le terme

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \Phi_m(n, l, l') \psi(v, j) x^{n+j} \alpha' \alpha''.$$

Faisons  $n + j = k$ , d'où

$$n = k - j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k);$$

le terme en  $x^k \alpha' \alpha''$  sera

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \chi(v, l, l', k) x^k \alpha' \alpha'',$$

si l'on pose

$$(93) \quad \chi(v, l, l', k) = \sum_{j=0}^{j=k} \Phi_m(k-j, l, l') \psi(v, j).$$

L'intégration donne

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \chi(v, l, l', k) x^k \alpha' \alpha'' \sqrt{x} dx \\ &= \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\alpha} \frac{2}{2k+3} \chi(v, l, l', k) \alpha^{k+l+1} \alpha''. \end{aligned}$$

Faisons  $l' = \lambda'$ ,  $k + l = \lambda$ , d'où

$$l = \lambda - k \quad (k = 0, 1, \dots, \lambda);$$

le terme en  $x^\lambda \alpha'^{\lambda'}$  sera

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \alpha \sqrt{\alpha} \sum_{k=0}^{k=\lambda} \frac{2}{2k+3} \chi(v, \lambda-k, \lambda', k) x^\lambda \alpha'^{\lambda'};$$

et si l'on pose

$$(94) \quad \begin{cases} A_m \alpha \sqrt{\alpha} = A'_{m+1}, \\ \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=\lambda} \frac{2}{2k+3} \chi(\nu, \lambda-k, \lambda', k), \end{cases}$$

on trouve finalement, comme nous l'avons annoncé,

$$(95) \quad \gamma'_{m+1} = \frac{e}{\pi^{m+1}} A'_{m+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') x'^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

Si, dans la formule (94), on remplace les symboles  $\psi$  et  $\chi$  par leurs valeurs (91) et (93), on aura

$$(96) \quad \begin{cases} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') \\ = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=\lambda} \sum_{j=0}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{\Phi_m(k-j, \lambda-k, \lambda')}{2k+3} \frac{i(i+1)\dots(i+j-1)}{1.2\dots j} \frac{1.3\dots[2(\nu-i)+1]}{1.2\dots(\nu-i+1)} \frac{(-1)^j}{2^{\nu-i}}. \end{cases}$$

Comme  $\gamma_0$  se réduit à la constante  $e$ , il en résulte  $\Phi'_0(\nu, \lambda, \lambda') = 0$  pour toutes les valeurs des arguments, sauf pour le système  $\nu = \lambda = \lambda' = 0$ , qui donne  $\Phi'_0(0, 0, 0) = 1$ . On voit alors que  $\Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda')$  est une fonction rationnelle des arguments entiers  $\nu, \lambda, \lambda'$ .

### III. — Calcul de $\beta'_{m+1}$ .

Arrivons enfin au calcul de

$$(79) \quad \beta'_{m+1} = \int_0^x \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\sqrt{x}}{y+x} dx.$$

Dans le développement de  $\gamma_m$ , prenons le terme

$$\frac{e}{\pi^m} A_m \Phi_m(n, l, l') x^n \alpha^l \alpha'^{l'}.$$

et effectuons la division

$$(97) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^n}{x+y} &= x^{n-1} - yx^{n-2} + \dots + (-1)^{v+1} y^{v+1} x^{n-v-2} + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} y^{n-1} + (-1)^n \frac{y^n}{x+y}. \end{aligned} \right.$$

Il y aura dans l'expression de  $\beta'_{m+1}$ , trois sortes de termes de nature analytique différente, suivant qu'ils proviendront de  $(-1)^n \frac{y^n}{x+y}$ , de  $x^{n-1}$ , de  $(-1)^{v+1} y^{v+1} x^{n-v-2}$ .

1° Termes qui proviennent de  $(-1)^n \frac{y^n}{x+y}$ . — L'intégration donne

$$\begin{aligned} & \frac{e}{\pi^{m+1}} \Lambda_m (-1)^n y^n \Phi_m(n, l, l') \alpha' \alpha' l' \int_0^x \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{dx}{y+x} \\ &= \frac{2e}{\pi^{m+1}} \Lambda_m (-1)^n y^n \alpha' \alpha' l' \Phi_m(n, l, l') \left( \sqrt{\frac{\alpha}{y}} - \text{arc tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \right). \end{aligned}$$

Le terme en  $\text{arc tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}}$  fournit à  $\beta'_{m+1}$  la série triple

$$(98) \quad - \frac{e}{\pi^{m+1}} \Lambda_m \text{arc tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\infty} (-1)^v \Phi_m(v, \lambda, \lambda') y^v \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

Quant aux termes en  $\sqrt{\frac{\alpha}{y}}$ , nous les séparerons, pour en tenir compte tout à l'heure, en deux catégories, dont la première comprendra les termes correspondant à  $n = 0$ , savoir

$$(99) \quad \frac{2e}{\pi^{m+1}} \Lambda_m \Phi_m(0, \lambda, \lambda') \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \sqrt{\frac{\alpha}{y}},$$

et la seconde les termes correspondant à toutes les valeurs  $v + 1$  de  $n$  autres que zéro, savoir

$$(100) \quad \frac{2e}{\pi^{m+1}} \Lambda_m (-1)^{v+1} y^v \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \Phi_m(v+1, \lambda-1, \lambda') \sqrt{\frac{y}{\alpha}}.$$

2° Termes qui proviennent de  $x^{n-1}$ . — On trouve en intégrant

$$\begin{aligned} & \frac{e}{\pi^{m+1}} \frac{A_m}{\sqrt{y}} \Phi_m(n, l, l') \alpha^l \alpha'^{l'} \int_0^\alpha x^{n-1} \sqrt{x} dx \\ &= \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \frac{2}{2n+1} \Phi_m(n, l, l') \alpha^{n+l} \alpha'^{l'}. \end{aligned}$$

Aux termes de cette nature il faut réunir le terme (99) correspondant à  $n = 0$ . Si l'on pose  $l' = \lambda'$ ,  $n + l = \lambda$ , d'où

$$l = \lambda - n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \lambda),$$

et

$$(101) \quad F_m(\lambda, \lambda') = \sum_{n=0}^{\lambda} \frac{2}{2n+1} \Phi_m(n, \lambda - n, \lambda'),$$

on trouvera dans  $\beta'_{m+1}$  la série double

$$(102) \quad \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} F_m(\lambda, \lambda') \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

3° Termes qui proviennent de  $(-1)^{v+1} y^{v+1} x^{n-v-2}$ . — L'intégration donne

$$\begin{aligned} & \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^{v+1} y^v \sqrt{y} \Phi_m(n, l, l') \alpha^l \alpha'^{l'} \int_0^\alpha x^{n-v-2} \sqrt{x} dx \\ &= \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\frac{y}{\alpha}} \frac{2}{2(n-v)-1} \Phi_m(n, l, l') y^v \alpha^{l+n-v} \alpha'^{l'}. \end{aligned}$$

Aux termes de cette nature il faut réunir le terme (100) correspondant à  $n = v + 1$  (le quotient  $\frac{x^n}{x+y}$  ne peut fournir un terme en  $y^{v+1}$  qu'à partir de  $n = v + 2$ ). Si l'on pose  $l' = \lambda'$ ,  $l + n - v = \lambda$ , d'où

$$n = \lambda + v - l \quad (l = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1),$$

et

$$(103) \quad \Psi_m(v, \lambda, \lambda') = \sum_{l=0}^{l=\lambda-1} (-1)^{v+1} \frac{2 \Phi_m(\lambda + v - l, l, \lambda')}{2(\lambda - l) - 1},$$



on aura dans  $\beta'_{m+1}$  la série

$$(104) \quad \frac{e}{\pi^{m+1}} \sqrt{\frac{y}{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

#### IV. — Solution par les séries multiples.

En réunissant les termes de nature diverse qui viennent d'être calculés (98), (102), (104), et en remplaçant  $e$  par sa valeur  $\frac{V}{2\pi f}$ , on trouve finalement

$$(105) \quad \beta'_{m+1} = \frac{V}{2\pi^{m+2}f} A_m \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} F_m(\lambda, \lambda') \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \\ & + \text{arc tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} (-1)^\nu \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \\ & + \sqrt{\frac{y}{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \end{aligned} \right\},$$

où les symboles  $A_m$ ,  $\Phi_m$ ,  $F_m$ ,  $\Psi_m$  ont des significations données par les formules (83), (96), (101), (103), que nous reproduisons :

$$(83) \quad A_m = \begin{cases} \alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \alpha^{\frac{m+1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m-1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$(101) \quad F_m(\lambda, \lambda') = \sum_{n=0}^{n=\lambda} \frac{2}{2n+1} \Phi_m(n, \lambda-n, \lambda'),$$

$$(103) \quad \Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^{\nu+1} \sum_{l=0}^{l=\lambda-1} \frac{2 \Phi_m(\lambda+\nu-l, l, \lambda')}{2(\lambda-l)-1},$$

$$(96') \quad \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=\lambda} \sum_{j=0}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Phi'_{m-1}(k-j, \lambda-k, \lambda')}{2k+3} \frac{i(i+1)\dots(i+j-1)}{1.2\dots j} \\ & \times \frac{1.3\dots[2(\nu-i)+1]}{1.2\dots(\nu-i+1)} \frac{(-1)^j}{2^{\nu-i}}, \end{aligned} \right.$$

$$(106) \quad \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') = \Phi'_m(\nu, \lambda', \lambda), \quad \Phi_0(\nu, \lambda, \lambda') = 0, \quad \Phi_0(0, 0, 0) = 1.$$

Les expressions de  $F_m$ ,  $\Psi_m$ ,  $\Phi_m$  montrent que ces coefficients purement numériques sont des fonctions rationnelles des arguments entiers qui y figurent. La valeur de  $\Lambda_m$  montre que l'ordre de petitesse des fonctions  $\beta$ ,  $\beta'$  va chaque fois en croissant d'une unité et demie.

Reportons-nous maintenant aux expressions des densités

$$\text{Densité extérieure} \dots \dots \frac{V}{2\pi f} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (\beta_m + \beta'_m)$$

$$\text{Densité intérieure} \dots \dots \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (\beta_m + \beta'_m).$$

De là résulte pour la densité intérieure  $e_i$  l'expression

$$(107) \left\{ e_i = \frac{V}{2\pi^2 f} \left[ S_1(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{x'}{y'}} + S_2(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y') \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{x'}{y'}} + S_3(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y') \sqrt{\frac{y'}{x'}} \right. \right. \\ \left. \left. + S_1(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{x}{y}} + S_2(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}, y) \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{x}{y}} + S_3(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}, y) \sqrt{\frac{y}{x}} \right] \right\},$$

où les symboles  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  désignent des séries entières par rapport à leurs arguments  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{x'}$ ,  $y'$  ou  $y$ . Dans ces séries, les coefficients numériques des termes des différents ordres s'obtiennent par un nombre *limité* d'opérations *rationnelles* faites sur le nombre incommensurable  $\pi$ .

Voici les calculs de ces séries exécutés jusqu'aux termes du quatrième ordre inclusivement :

$$(108) \left\{ \begin{aligned} S_1(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}) &= 1 + \frac{2}{3\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5\pi} \alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha' + \frac{4}{9\pi^2} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7\pi} \alpha^{\frac{7}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{3\pi} \alpha^{\frac{5}{2}} \alpha' + \frac{1}{4\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^2 - \frac{2}{5\pi^2} \alpha^{\frac{5}{2}} \alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{22}{45\pi^2} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^{\frac{5}{2}}, \\ S_2(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y') &= -1 - \frac{2}{3\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5\pi} \alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} y' - \frac{4}{9\pi^2} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7\pi} \alpha^{\frac{7}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \alpha^{\frac{5}{2}} y' - \frac{5}{4\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} y'^2 - \frac{2}{3\pi^2} \alpha^{\frac{5}{2}} \alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15\pi^2} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3\pi^2} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^{\frac{3}{2}} y', \\ S_3(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y') &= \frac{1}{\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha' - \frac{1}{\pi} \alpha^{\frac{5}{2}} \alpha' - \frac{5}{12\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^2 + \frac{5}{4\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha' y' + \frac{2}{3\pi^2} \alpha^{\frac{3}{2}} \alpha'^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right.$$

S.58 G. ROBIN. — SUR LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ, ETC.

En faisant  $\alpha = 0$ , on retrouve la loi de la distribution électrique sur la calotte sphérique

$$(109) \quad e_i = \frac{V}{2\pi^2 f} \left( \sqrt{\frac{\alpha'}{y'}} - \text{arc tang} \sqrt{\frac{\alpha'}{y'}} \right).$$

C'est, aux notations près, la formule obtenue par sir W. Thomson (*Reprint*, p. 185; 1872).



---

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME TROISIÈME.

---

	Pages
Développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce; par M. <i>P. Appell</i> , Maître de Conférences à l'École Normale supérieure .....	9
Deux Leçons de Cinématique; par M. <i>Jules Tannery</i> , Maître de Conférences à l'École Normale supérieure .....	43
Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite; par M. <i>Markoff</i> , Privat-Docent à l'Université de Saint-Petersbourg .....	81
Mémoire sur la combinaison des substances gazeuses les unes avec les autres; par M. <i>Gay-Lussac</i> .....	89
Sur les fonctions d'une variable analogues aux fonctions hypergéométriques; par M. <i>E. Goursat</i> , Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse .....	107
Sur le changement de variables; par M. <i>E. Marchand</i> , Professeur au Lycée de Carcassonne .....	137 et 343
Étude sur les surfaces gauches; par M. <i>Ed. Dewulf</i> , Colonel du Génie .....	189
Recherches sur quelques séries semi-convergentes; par M. <i>Th. Stieltjes</i> .....	201
Applications de la théorie des cubiques gauches; par M. <i>C. Guichard</i> , Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes .....	259
Applications de la Thermodynamique aux phénomènes thermo-électriques et pyro-électriques; par M. <i>P. Duhem</i> .....	263
Sur la théorie des rayons lumineux; par M. <i>G. Kirchhoff</i> .....	303
Sur le théorème d'Eisenstein; par M. <i>Gomes Teixeira</i> , ancien Professeur à l'Université de Coïmbre, Professeur à l'École Polytechnique de Porto .....	389
Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles; par M. <i>L. Sauvage</i> , Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille .....	391
Mémoire sur une transformation géométrique générale dont un cas particulier est applicable à la Cinématique; par M. <i>Ed. Dewulf</i> , Colonel du Génie .....	405

## SUPPLÉMENT AU TOME III.

	Pages
Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts: par M. G. Robin.....	S. 1

## ERRATA.

Page S. 9, formule (2), au lieu de  $-\frac{q_1}{4\pi}$ , lire  $-\frac{q_1}{4\pi R}$ .

Pages S. 40 et S. 41. Le théorème énoncé sur un système de conducteurs ouverts appartenant géométriquement à la même sphère est inexact; il faut le modifier comme il suit :  
*La différence entre les densités externe et interne est la même pour chaque conducteur que s'il était seul avec le potentiel qu'il a dans le système.*

Page S. 44. L'appel de note (1), qui porte sur les mots *densité électrique* de la ligne 4. doit être rapporté au mot *densité* de la ligne 7.

21.  
ep



1







